EJERCICIOS RESUELTOS

CURSO DE ANÁLISIS COMPLEJO

(VARIABLE COMPLEJA/EjAMII/EjerResII1.tex)

Octubre-2009

Capítulo 1.

Números complejos. Funciones complejas elementales.

pp. 1 - 74

Ejercicio Resuelto 10.
Calcula la solución de la ecuación:

$$z^4 + (1+i)z^2 + 5i = 0$$

Solución.

$$z^2 = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 20i}}{2} = \frac{-1 - i \pm \sqrt{-18i}}{2} =$$

$$\frac{-1 - i \pm \sqrt{18}\ \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\ \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2} = \frac{1}{2}\left[-1 - i \pm 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[-1 - i \pm 3(1-i)\right].$$

Luego

$$z^2 = 1 - 2i \qquad \text{o} \qquad z^2 = -2 + i.$$

Si $z^2 = 1 - 2i$, entonces

$$z = \pm\sqrt{1-2i} = \pm\sqrt[4]{5}\ \left(\cos\left(\operatorname{arc\,tg}(-2)\right) + i \operatorname{sen}\ \left(\operatorname{arc\,tg}(-2)\right)\right).$$

Si $z^2 = -2 + i$, entonces

$$z = \pm\sqrt{-2+i} = \pm\sqrt[4]{5}\ \left(\cos\left(\operatorname{arc\,tg}(-\frac{1}{2}) + \pi\right) + i \operatorname{sen}\ \left(\operatorname{arc\,tg}(-\frac{1}{2}) + \pi\right)\right) =$$

$$\pm\sqrt[4]{5}\ \left(\cos\left(\operatorname{arc\,tg}(-\frac{1}{2})\right) + i \operatorname{sen}\ \left(\operatorname{arc\,tg}(-\frac{1}{2})\right)\right).$$

■

Ejercicio Resuelto 11.
Prueba las desigualdades:

a) $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leq |z - w|$.

b) $|z+w| \geq \frac{1}{2}(|z|+|w|)\left|\frac{z}{|z|}+\frac{w}{|w|}\right|$.

donde z, w son números complejos no nulos. Estudia también cuando se da la igualdad en cada una de dichas desigualdades.

Solución.

a)

$$||z|-|w||^2 = |z|^2+|w|^2-2|z||w| = |z|^2+|w|^2-2|zw| \leq$$
$$|z|^2+|w|^2-2\mathrm{Re}\ (z\bar{w}) = |z-w|^2.$$

Además, nótese que se da la igualdad si, y sólo si,

$$\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) = |z\bar{w}| \Leftrightarrow z\bar{w} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \exists\lambda > 0 \,:\, z\bar{w} = \lambda.$$

Así, supuesto $w \neq 0$, llamando $\rho = \frac{\lambda}{|w|^2}$, tenemos que

$$||z|-|w|| = |z-w| \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists\rho > 0 \,:\, z = \rho w.$$

b)

$$\frac{1}{2}(|z|+|w|)\left|\frac{z}{|z|}+\frac{w}{|w|}\right| \leq |z+w|$$

Es claro que la desigualdad es equivalente a la que resulta al elevar ambos miembros al cuadrado:

$$\frac{1}{4}(|z|^2+|w|^2+2|zw|)\left(1+1+2\,\mathrm{Re}\,\frac{z\bar{w}}{|zw|}\right) \leq |z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w})$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{2}(|z|^2+|w|^2+2|zw|)\left(1+\ \mathrm{Re}\,\frac{z\bar{w}}{|zw|}\right) \leq |z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w})$$

que a su vez se puede reescribir

$$|z|^2+|w|^2+2|zw|+\frac{|z|}{w}\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w})+\frac{|w|}{z}\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w})+2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) \leq$$
$$2|z|^2+2|w|^2+4\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w})$$

o también

$$2|zw| + \frac{|z|}{|w|}\operatorname{Re}(z\bar{w}) + \frac{|w|}{|z|}\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

lo que equivale, multiplicando por $|zw|$, a

$$2|zw|^2 + |z|^2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2|zw| + |w|^2|zw| + 2|zw|\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

equivalentemente

$$|z|^2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2\operatorname{Re}(z\bar{w}) - 2|zw|\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2|zw| + |w|^2|zw| - 2|zw|^2$$

o lo que es lo mismo

$$(|z| - |w|)^2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq (|z| - |w|)^2|zw|$$

desigualdad que claramente es cierta.

Teniendo en cuenta que todas las expresiones anteriores son equivalentes, se sigue que se da la igualdad en la primera expresión si, y solamente si, se da la igualdad en la última, lo que claramente equivale a que

$$\begin{cases} (|z| - |w|)^2 = 0 \Leftrightarrow |z| = |w| \\ \text{ó} \\ \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |zw| \Leftrightarrow z = \rho w \quad \text{para } \rho > 0 \end{cases}$$

■

Ejercicio Resuelto 12.
Expresa en forma binómica los números:

$$(1+i)^{25}, \qquad (\sqrt{3}+i)^{37}, \qquad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{24}.$$

Solución.

$$(1+i)^{25} = [\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}))]^{25} = (\sqrt{2})^{25}(\cos(\frac{25\pi}{4}) + i\operatorname{sen}(\frac{25\pi}{4})) =$$

$$2^{\frac{25}{2}}(\cos(6\pi + \frac{\pi}{4}) + i\operatorname{sen}(6\pi + \frac{\pi}{4})) = 2^{\frac{25}{2}}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})) =$$

$$2^{\frac{25}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2^{12}(1+i).$$

$$(\sqrt{3}+i)^{37} = [2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}\,(\frac{\pi}{6}))]^{37} = 2^{37}(\cos(\frac{37\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}\,(\frac{37\pi}{6})) =$$

$$2^{37}(\cos(6\pi+\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}\,(6\pi+\frac{\pi}{6})) = 2^{37}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}\,(\frac{\pi}{6})) =$$

$$2^{37}(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}) = 2^{36}(\sqrt{3}+i).$$

$$(1+i\sqrt{3})^{24} = [2(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3})]^{24} = 2^{24}(\cos\frac{24\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{24\pi}{3}) =$$

$$2^{24}(\cos 8\pi + i\,\mathrm{sen}\, 8\pi) = 2^{24}$$

y

$$(-1+i)^{24} = [\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4})]^{24} = 2^{12}(\cos 24\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\, 24\frac{3\pi}{4}) =$$

$$2^{12}(\cos 18\,\pi + i\,\mathrm{sen}\, 18\,\pi) = 2^{12},$$

luego

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{24} = \frac{(1+i\sqrt{3})^{24}}{(-1+i)^{24}} = \frac{2^{24}}{2^{12}} = 2^{12}.$$

■

Ejercicio Resuelto 13.
Sean $n \in \mathbb{N}$ *y* $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$*. Dado* $m \in \mathbb{Z}$*, calcula el valor de las expresiones:*

(a) $1 + w^m + w^{2m} + \cdots + w^{(n-1)m}$

(b) $1 - w^m + w^{2m} - \cdots + (-1)^{n-1}w^{(n-1)m}$

Solución.
Empecemos calculando la suma de una progresión geométrica.

Para $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, se tiene que

$$1 + w + \cdots + w^n = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} \qquad si \qquad w \neq 1$$

$$1 + w + \cdots + w^n = n + 1 \qquad si \qquad w = 1.$$

En efecto, si $w = 1$, es claro. Supuesto $w \neq 1$, si llamamos

$$S := 1 + w + \cdots + w^n,$$

se tiene que

$$(w - 1)S = w^{n+1} - 1,$$

de donde se sigue el enunciado.

a) Puesto que

$$S := 1 + w^m + w^{2m} + \cdots + w^{(n-1)m} = 1 + w^m + (w^m)^2 + \cdots + (w^m)^{n-1}$$

se sigue de lo anterior que $S = n$ cuando $w^m = 1$, mientras que si $w^m \neq 1$, entonces:

$$S = \frac{(w^m)^n - 1}{w^m - 1} = \frac{w^{nm} - 1}{w^m - 1} = 0$$

ya que

$$w^{nm} = \cos\frac{2nm\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2nm\pi}{n} = \cos 2m\pi + i\operatorname{sen} 2m\pi = 1.$$

Nótese que $w^m = 1$, equivale a

$$\cos\frac{2m\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2m\pi}{n} = 1,$$

lo que a su vez equivale a $\dfrac{2m\pi}{n} \in 2\pi\mathbb{Z}$, o lo que es lo mismo n divide a m.

Resumiendo,

$$1 + w^m + w^{2m} + \cdots + w^{(n-1)m} = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ divide a } m \\ 0 & \text{si } n \text{ no divide a } m \end{cases}$$

b) Puesto que

$$S := 1 - w^m + w^{2m} - \cdots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)m} =$$

$$1 + (-w^m) + (-w^m)^2 + \cdots + (-w^m)^{n-1},$$

teniendo en cuenta la expresión de la suma de una progresión geométrica, tenemos que $S = n$ si $-w^m = 1$, mientras que cuando $-w^m \neq 1$,

$$S = \frac{(-w^m)^n - 1}{(-w^m) - 1} = \frac{(-1)^n w^{mn} - 1}{-(w^m + 1)} =$$

(como $w^{mn} = \cos 2m\pi + i \operatorname{sen} 2m\pi = 1$)

$$\frac{(-1)^n - 1}{-(w^m + 1)} = \begin{cases} 0 & \text{si n es par} \\ \dfrac{2}{w^m + 1} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Nótese que la condición $-w^m = 1$, esto es $w^m = -1$, o lo que es lo mismo

$$cos\frac{2m\pi}{n} + isen\frac{2m\pi}{n} = -1,$$

equivale a $\dfrac{2m\pi}{n} \in (2k-1)\pi$ para conveniente $k \in \mathbb{Z}$, o lo que es lo mismo, $2m$ es un múltiplo impar de n, o equivalentemente n es par y m es un múltiplo de $\frac{n}{2}$.

Resumiendo

$$1 - w^m + w^{2m} - \cdots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)m} = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par y } \frac{n}{2} \text{ divide a } m \\ 0 & \text{si } n \text{ es par y } \frac{n}{2} \text{ no divide a } m \\ \frac{2}{w^m+1} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

■

Ejercicio Resuelto 14.
Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las siguientes igualdades:

(a) $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \quad \dfrac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2}\, x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$

(b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \quad \dfrac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2}\, x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$

Solución.

Llamemos:

$$A = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

$$B = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx,$$

$$w = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Como $x \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, se tiene que $w \neq 1$ y por tanto

$$A + iB = 1 + w + ... + w^n = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1}$$

Consideremos el número complejo

$$z := \cos \frac{x}{2} + i \operatorname{sen} \frac{x}{2},$$

y notemos que $z^2 = w$, así como que $|z| = 1$, y por tanto $z\bar{z} = 1$. Ahora, escribamos la igualdad anterior como sigue:

$$A + iB = \frac{z^{2(n+1)} - 1}{z^2 - 1} = \frac{z^{n+1} z^{n+1} - z^{n+1} \bar{z}^{n+1}}{z^2 - z\bar{z}} = \frac{z^{n+1}(z^{n+1} - \bar{z}^{n+1})}{z(z - \bar{z})} =$$

$$z^n \quad \frac{z^{n+1} - \bar{z}^{n+1}}{z - \bar{z}} = (\cos \frac{n}{2}x + i \operatorname{sen} \frac{n}{2}x) \; \frac{2i \operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x}{2i \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

Igualando partes reales y partes imaginarias se obtiene el enunciado. ■

Ejercicio Resuelto 15.

Dados dos números complejos distintos $a, b \in \mathbb{C}$, justifica que $\dfrac{z-a}{z-b}$ es real si, y sólo si , z está en la recta que pasa por a y por b; y es real negativo si, y sólo si, z está en el segmento que une a con b.

Solución.

Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$. Nótese que, para $z \in \mathbb{C}\backslash\{b\}$, se tiene que

$$\frac{z-a}{z-b} = t \in \mathbb{R} \text{ (a la fuerza } t \neq 1 \text{ por ser } a \neq b) \Leftrightarrow z - a = t(z-b) \Leftrightarrow$$

$$(1-t)z = a - tb \Leftrightarrow (1-t)z = (1-t)a + t(a-b) \Leftrightarrow$$

$$z = a + \frac{t}{t-1}(a-b) \Leftrightarrow z = a + \lambda(b-a) \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1).$$

En la última equivalencia se ha utilizado que la aplicación

$$\mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

$$t \longmapsto \frac{t}{t-1}$$

es una biyección (Dibújese se gráfica).

Finalmente, nótese que

$$t < 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{t}{1-t} \ \in \ ]0,1[\ \Leftrightarrow \ z \ \in \ ]a,b[.$$

■

Ejercicio Resuelto 16.
Dados dos números complejos distintos a, b y un número positivo $\rho \neq 1$, justifica que el conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \frac{z-a}{z-b} = \rho\}$$

representa una circunferencia en el plano cuyo centro y radio debes calcular.

Solución.

Notemos que la condición $|\frac{z-a}{z-b}| = \rho$ se puede reescribir equivalentemente de las siguientes formas:

$$|z-a| = \rho|z-b|$$

$$|z-a|^2 = \rho^2|z-b|^2$$

$$|z|^2 + |a|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{a}) = \rho^2(|z|^2 + |b|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{b}))$$

$$(1-\rho^2)|z|^2 + |a|^2 - \rho^2|b|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(z(\overline{a-\rho^2 b})\right) = 0$$

Como ρ es positivo y $\rho \neq 1$, se sigue que $1-\rho^2 \neq 0$, y por tanto

$$|z|^2 + \frac{|a|^2-\rho^2|b|^2}{1-\rho^2} - 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{\frac{a-\rho^2 b}{1-\rho^2}}\right) = 0$$

$$\left|z - \frac{a-\rho^2 b}{1-\rho^2}\right|^2 - \left|\frac{a-\rho^2 b}{1-\rho^2}\right|^2 + \frac{|a|^2-\rho^2|b|^2}{1-\rho^2} = 0$$

$$\left|z - \frac{a-\rho^2 b}{1-\rho^2}\right|^2 = \frac{|a-\rho^2 b|^2}{(1-\rho^2)^2} - \frac{|a|^2-\rho^2|b|^2}{1-\rho^2}$$

Notemos que:

$$\frac{|a-\rho^2 b|^2}{(1-\rho^2)^2} - \frac{|a|^2-\rho^2|b|^2}{1-\rho^2} = \frac{|a|^2+\rho^4|b|^2-2\rho^2\,\mathrm{Re}\,(a\bar{b})}{(1-\rho^2)^2} - \frac{|a|^2-\rho^2|b|^2}{1-\rho^2} =$$

$$\frac{|a|^2+\rho^4|b|^2-2\rho^2\,\mathrm{Re}\,(a\bar{b}) - |a|^2 + \rho^2|b|^2 + \rho^2|a|^2 - \rho^4|b|^2}{(1-\rho^2)^2} =$$

$$\frac{\rho^2(|a|^2+|b|^2-2\,\mathrm{Re}\,(a\bar{b}))}{(1-\rho^2)^2} = \frac{\rho^2|a-b|^2}{(1-\rho^2)^2}$$

Luego A es la circunferencia de centro $C = \dfrac{a-\rho^2 b}{1-\rho^2}$ y radio $R = \dfrac{\rho|a-b|}{|1-\rho^2|}$. ■

Ejercicio Resuelto 17.

(a) Sean $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Pruébese que $z_1,\ z_2,\ z_3$ son vértices de un triángulo equilátero si, y solo si,

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

(b) *Deduce de lo anterior que si el baricentro y el circuncentro de un triángulo coinciden, dicho triángulo debe ser equilátero.*

Solución.

(a)
[$\Rightarrow$] Si $z_1,\ z_2,\ z_3$ son los vértices de un triángulo equilátero y se suponen escritos en forma consecutiva en sentido contrario a las agujas del reloj, entonces

$$z_2 = z_1 w \qquad \text{y} \qquad z_3 = z_1 w^2$$

donde

$$w = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}.$$

Luego

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1(1 + w + w^2) = z_1\frac{w^3 - 1}{w - 1} = z_1\frac{1 - 1}{w - 1} = 0.$$

[$\Leftarrow$] Si $z_1+z_2+z_3 = 0$, entonces (teniendo en mente que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$) vemos que

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1z_2z_3(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = 0,$$

luego

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - z_1z_2z_3.$$

Por consiguiente, $z_1,\ z_2,\ z_3$ son las tres raíces cúbicas del número complejo de módulo 1

$$a = z_1z_2z_3,$$

y por tanto determinan un triángulo equilátero.

(b)
Nótese que el baricentro del triángulo $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ determinado por tres números complejos no colineales z_1, z_2, z_3 viene dado por

$$\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

En efecto, calculemos el punto intersección de la mediana que pasa por el vértice z_1 con la mediana que pasa por el vértice z_2.

$$\begin{cases} z = z_1 + \lambda(\dfrac{z_2+z_3}{2} - z_1) & (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \\ z = z_2 + \mu(\dfrac{z_1+z_3}{2} - z_2) & (\mu \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Luego

$$z_1 + \lambda(\frac{z_2+z_3}{2} - z_1) = z_2 + \mu(\frac{z_1+z_3}{2} - z_2) \quad \Rightarrow$$

$$2z_1 + \lambda(z_2 + z_3 - 2z_1) = 2z_2 + \mu(z_1 + z_3 - 2z_2) \Rightarrow$$

$$(2 - 2\lambda - \mu)z_1 - (2 - \lambda - 2\mu)z_2 + (\lambda - \mu)z_3 = 0 \Rightarrow$$

$$(2 - 2\lambda - \mu)(z_1 - z_3) - (2 - \lambda - 2\mu)(z_2 - z_3) = 0.$$

Como $z_1,\ z_2,\ z_3$ son no colineales, se sigue que $z_1 - z_3$ y $z_2 - z_3$ son linealmente independientes, luego

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda - \mu = 0 \\ \\ 2 - \lambda - 2\mu = 0 \end{cases}$$

Restando se obtiene $\lambda = \mu$, y por tanto de la primera ecuación

$$2 - 3\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}.$$

Por tanto, la intersección de ambas medianas es

$$z = z_1 + \frac{2}{3}(\frac{z_2+z_3}{2} - z_1) = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Llamemos c al circuncentro del triángulo $\triangle(z_1, z_2, z_3)$, esto es al centro de la circunferencia que pasa por los puntos $z_1,\ z_2,\ z_3$, y llamemos R al radio de dicha circunferencia.

Es claro que la traslación $z \mapsto z - c$ y la homotecia $z \mapsto \frac{1}{R}z$ mantienen igualdad de distancias. Por tanto:

$\triangle(z_1, z_2, z_3)$ es equilátero $\Leftrightarrow \triangle(\frac{z_1-c}{R}, \frac{z_2-c}{R}, \frac{z_3-c}{R})$ es equilátero,

lo que equivale (usando el apartado (a))

$$\frac{z_1 - c}{R} + \frac{z_2 - c}{R} + \frac{z_3 - c}{R} = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 - 3c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3},$$

esto es, c coincide con el baricentro de $\triangle(z_1, z_2, z_3)$.

■

Ejercicio Resuelto 18.
Indica condiciones que deben cumplir los números complejos $a \neq 0$, b y c para que las raíces de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$ formen con el origen un triángulo equilátero.

Solución.

Si llamamos $d = \sqrt{b^2 - 4ac}$, entonces las soluciones de la ecuación son

$$z_1 = \frac{-b + d}{2a} \text{ y } z_2 = \frac{-b - d}{2a}$$

La equilateralidad del triángulo equivale a

$$|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$$

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

$$\frac{|b - d|^2}{4|a|^2} = \frac{|b + d|^2}{4|a|^2} = \frac{4|d|^2}{4|a|^2}$$

$$|b - d|^2 = |b + d|^2 = 4|d|^2$$

equivalentemente,

$$\begin{cases} (1) \quad b\overline{d} + \overline{b}d = 0 \\ \\ (2) \quad |b|^2 = 3|d|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \quad b\overline{d} = -\overline{b}d \\ \\ (2) \quad b\overline{b} = 3d\overline{d} \end{cases}$$

Notemos que

$$(1) \text{ y } (2) \quad \Leftrightarrow \quad (3) \;\; b^2 = -3d^2.$$

En efecto, tanto (1) y (2), como (3), se satisfacen si $b = 0$ y $d = 0$.
Supongamos que $b \neq 0$ ó $d \neq 0$. Si b y d satisfacen (1) y (2), entonces ambos son no nulos y, sin más que multiplicar miembro a miembro (1) por

(2) y simplificar por $\overline{b}\,\overline{d}$ obtenemos (3). Recíprocamente, si b y d satisfacen (3), entonces ambos son no nulos y, (2) se sigue de (3) sin mas que tomar módulos. Ahora, (1) se obtiene multiplicando ambos miembros de (3) por $\overline{b}\,\overline{d}$ y dividiendo miembro a miembro por (2).

Finalmente, notemos que se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{gathered} b^2 = -3d^2 \\ b^2 + 3d^2 = 0 \\ b^2 + 3(b^2 - 4ac) = 0 \\ 4b^2 - 12ac = 0 \\ b^2 - 3ac = 0 \\ b^2 = 3ac \end{gathered}$$

De otra manera (usando el ejercicio 22)

Si z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$, entonces:

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}$$

y por tanto

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Por el ejercicio 22, el triángulo determinado por $z_1,\ z_2,\ z_3$ es equilátero si, y solo si,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

En nuestro caso, como $z_3 = 0$, la condición se reduce a

$$z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2,$$

equivalentemente

$$\begin{gathered} (z_1 + z_2)^2 = 3z_1 z_2 \\ (-\frac{b}{a})^2 = 3\frac{c}{a} \\ b^2 = 3ac \end{gathered}$$

■

1.2.5. Ejercicios Resueltos (pp. 12-17)

Ejerc. 1 - 18

1.3.3. Ejercicios Resueltos (pp. 28-29)

Ejerc. 19 - 24

Ejercicio Resuelto 19.
Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n \in Arg(z_n)$. Supuesto que

$$\{\varphi_n\} \longrightarrow \varphi \quad y \quad \{| z_n |\} \longrightarrow \rho,$$

justifica que

$$\{z_n\} \longrightarrow \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

Solución.

Es consecuencia de la continuidad de las operaciones suma y producto de números complejos, así como de la continuidad de las funciones módulo, seno y coseno.

$$\{z_n\} = \{| z_n | (\cos\varphi_n + i \operatorname{sen}\varphi_n)\} \longrightarrow \rho(\cos\ \varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

■

Ejercicio Resuelto 20.
Calcula el límite de la sucesión

$$z_n = \left(1 + \frac{\sqrt{2} + i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n.$$

Solución.

$$|z_n| = \left|1 + \frac{\sqrt{2} + i\frac{\pi}{3}}{n}\right|^n = \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{3n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} =$$

$$\left[1 + \frac{2\sqrt{2}}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{\pi^2}{9n^2}\right]^{\frac{n}{2}} \to e^{\lim \frac{n}{2}\left[\frac{2\sqrt{2}}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{\pi^2}{9n^2}\right]} = e^{\sqrt{2}}$$

$$\varphi_n = n \arg\left(1 + \frac{\sqrt{2} + i\frac{\pi}{3}}{n}\right) = n \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\pi}{3n}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{n}} = n \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{3(n + \sqrt{2})}$$

Como quiera que $(\operatorname{arc\,tg})' x = \frac{1}{1+x^2}$, y por tanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1,$$

vemos que

$$\varphi_n = \frac{n\pi}{3(n + \sqrt{2})} \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{3(n+\sqrt{2})}}{\frac{\pi}{3(n+\sqrt{2})}} \to \frac{\pi}{3}.1 = \frac{\pi}{3}.$$

Por el ejercicio anterior

$$\{z_n\} \to e^{\sqrt{2}} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = e^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

■

Ejercicio Resuelto 21.
Prueba que la sucesión $\{z_n\}$ dada, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$z_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{k}\right)$$

tiene como valores de adherencia todos los puntos de una cierta circunferencia.

Recuérdese que, dada una sucesión de números complejos $\{z_n\}$, se dice que un número complejo w es un valor de adherencia *de dicha sucesión, si hay alguna sucesión parcial $\{z_{\sigma(n)}\}$ que converge a w.*

Solución.

$$|z_n| = \prod_{k=1}^{n} \left|1 + \frac{i}{k}\right| = \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{1}{k^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \log|z_n| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k^2}\right).$$

Como quiera que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \log'(1) = 1,$$

y por tanto

$$\lim \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

se sigue del criterio de comparación por paso al límite que la seria

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

converge. En consecuencia, $\exists\ \lim \log|z_n|$, y por tanto $\exists\ \lim|z_n|$.
Llamemos $R = \lim|z_n|$.
Nótese que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \arg\left(1+\frac{i}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{k} \in\ Arg(z_n).$$

Como quiera que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = (\operatorname{arc\,tg})'(0) = 1,$$

y por tanto

$$\lim \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

se sigue del criterio de comparación por paso al límite que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}$$

diverge.
Dado $z \in C(0,R)$, llamemos θ al argumento de z tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma(n) = \min\{k \in \mathbb{N}\ :\ \theta + 2n\pi < \varphi_k\}$$

y notemos que

$$\varphi_{\sigma(n)} - 2n\pi \in\ Arg(z_{\sigma(n)})$$

y

$$|(\varphi_{\sigma(n)} - 2n\pi) - \theta| = |\varphi_{\sigma(n)} - (\theta + 2n\pi)| \leq |\varphi_{\sigma(n)} - \varphi_{\sigma(n)-1}| = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sigma(n)} \to 0,$$

luego

$$\{\varphi_{\sigma(n)} - 2n\pi\} \to \theta.$$

Ahora, por el ejercicio 19 se obtiene que

$$\{z_{\sigma(n)}\} \to z.$$

$\blacksquare$

Ejercicio Resuelto 22.
La serie

$$\sum_{n\geq 1} z_n$$

tiene la propiedad de que las cuatro partes suyas formadas por los términos pertenecientes a un mismo cuadrante cerrado del plano convergen. Demuéstrese que dicha serie es absolutamente convergente.

Solución.

Para cada $k \in \{1,2,3,4\}$ denotamos por C_k al cuadrante cerrado k. Empecemos probando que si $\{z_n\}$ es una sucesión en C_k tal que la serie $\sum z_n$ converge, entonces las series

$$\sum |\text{Re }(z_n)| \qquad \text{y} \qquad \sum |\text{Im }(z_n)|$$

convergen.

Caso k=1: Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$z_n = \text{Re }(z_n) + i\,\text{Im }(z_n) = |\text{Re }(z_n)| + i\,|\text{Im }(z_n)|.$$

Luego, si $\sum z_n$ converge, también $\sum |\text{Re }(z_n)|$ *y* $\sum |\text{Im }(z_n)|$ convergen.

Caso k=2: Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$-iz_n = \text{Im }(z_n) - i\ \text{Re }(z_n) = |\text{Im }(z_n)| + i\,|\text{Re }(z_n)|.$$

Puesto que si $\sum z_n$ converge, también $-i\sum z_n = \sum(-iz_n)$ converge, se sigue que $\sum |\text{Re }(z_n)|$ y $\sum |\text{Im }(z_n)|$ convergen.

Caso k=3: Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$-z_n = -\text{Re }(z_n) - i\ \text{Im }(z_n) = |\text{Re }(z_n)| + i\,|\text{Im }(z_n)|.$$

Puesto que si $\sum z_n$ converge, también $-\sum z_n = \sum(-z_n)$ converge, se sigue que $\sum |\text{Re } (z_n)|$ y $\sum |\text{Im } (z_n)|$ convergen.

Caso k=4: Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$i\, z_n = -\text{Im } (z_n) + i \text{ Re } (z_n) = |\text{Im } (z_n)| + i\, |\text{Re } (z_n)|.$$

Puesto que si $\sum z_n$ converge, también $i \sum z_n = \sum i\, z_n$ converge, se sigue que $\sum |\text{Re } (z_n)|$ y $\sum |\text{Im } (z_n)|$ convergen.

- Sea $\sum z_n$una serie de números complejos.
Denotaremos por $\{z_{\sigma_k(n)}\}$ a la sucesión parcial de $\{z_n\}$ formada por los términos que pertenecen al cuadrante C_k.
(En el caso en que en algún cuadrante hubiese solamente un número finito de términos, podríamos estudiar la serie a partir de un término de manera que en dicho cuadrante no hubiese ningún término.)
Si para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos

$$A_n \quad \text{a la suma parcial } n\text{-ésima} \quad \text{de } \sum |\text{Re } (z_n)|$$

$$A_n^{(k)} \quad \text{a la suma parcial } n\text{-ésima} \quad \text{de } \sum |\text{Re } (z_{\sigma_k(n)})| \ (k = 1, 2, 3, 4)$$

es claro que

$$A_n \leq A_n^{(1)} + A_n^{(2)} + A_n^{(3)} + A_n^{(4)}.$$

Luego:
Si $\sum z_{\sigma_k(n)}$ converge ($k = 1, 2, 3, 4$), por lo anterior $A_n^{(k)}$ converge ($k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) y por la anterior desigualdad A_n converge, esto es, $\sum |\text{Re } (z_n)|$ converge.
Análogamente se razona con $\sum |\text{Im } (z_n)|$.
Finalmente, como quiera que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$|z_n| \leq |\text{Re } (z_n)| + |\text{Im } (z_n)|$$

se sigue de lo anterior que la serie $\sum |z_n|$ converge. ■

Ejercicio Resuelto 23. Serie Geométrica.
Dado $z \in \mathbb{C}$, estudia la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 0} z^n.$$

Solución.

- Si $|z| \geq 1$, entonces

$$|z^n| = |z|^n \geq 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego $\{z^n\} \nrightarrow 0$, y por tanto la serie $\sum z^n$ no converge.

- Si $|z| < 1$, entonces $\{|z|^n\} \to 0$, y por tanto $\{z^n\} \to 0$.
Como quiera que $z \neq 1$, se sigue que

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \ \to \ \frac{1}{1-z},$$

luego la serie es convergente y además

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

De hecho, cambiando z por $|z|$, obtenemos que la serie es absolutamente convergente.

■

Ejercicio Resuelto 24.
Estudia la convergencia de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} + i \, \frac{1}{n\sqrt{n}} \right).$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n} \, \frac{1}{n}.$

Solución.
En ambos casos estudiaremos las series parte real y parte imaginaria.

(a)
$\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge por ser la armónica de razón $\frac{3}{2} > 1$.

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{(\sqrt{n}+(-1)^n)(\sqrt{n}-(-1)^n)} =$$

$$= \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n\sqrt{n}-1}{n-1} = \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-1}.$$

Estudiemos por separado ambas series:
Nótese que $\sum(-1)^n$ tiene sumas parciales acotadas y $\frac{\sqrt{n}}{n-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{n}} \to 0$ y es decreciente:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)-1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1} \Leftrightarrow (n-1)\sqrt{n+1} \leq n\sqrt{n} \Leftrightarrow$$

$$(n-1)^2(n+1) \leq n^3 \Leftrightarrow n^3-n^2-n+1 \leq n^3 \Leftrightarrow 1 \leq n^2+n.$$

Luego, por el Criterio particular de Dirichlet, la serie

$$\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

es convergente.
La serie

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-1} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$$

es divergente, por ser la serie armónica de razón 1. Luego, la serie de las partes reales de la serie **a)** es divergente, y por tanto lo mismo le pasa a la serie **a)**.

(b)

Nótese que $w = \frac{2+i}{1+2i}$ es un complejo de módulo 1 y distinto de 1, luego

$$|1+w+\cdots+w^n| = \left|\frac{w^{n+1}-1}{w-1}\right| \leq \frac{2}{|w-1|},$$

esto es, la serie $\sum w^n$ tiene sumas parciales acotadas.
Puesto que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$, por el Criterio particular de Dirichlet se sigue que la serie del enunciado es convergente.

1.4.5. Ejercicios Resueltos (pp. 38-39)

Ejerc. 25 - 29

Ejercicio Resuelto 25.
Dado $\alpha \in]-\pi, \pi]$ *definamos para cada* $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\arg_\alpha(z) = \operatorname{Arg}(z) \cap [\alpha, \alpha + 2\pi[,$$

es decir, $\arg_\alpha(z)$ *es el único argumento de* z *que está en el intervalo*

$$[\alpha, \alpha + 2\pi[.$$

Prueba que la función

$$\arg_\alpha : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$

es continua en $\mathbb{C}\backslash\{\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \, : \, \rho \geq 0\}$.

Solución.

Nótese que si $\alpha = \pi$, entonces tenemos que

$$\arg_\pi : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$

es la función definida por

$$\arg_\pi(z) = \begin{cases} \arg(z) + 2\pi & si \quad z \notin \mathbb{R}^- \\ \\ \pi & si \quad z \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Puesto que en el abierto $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ la función argumento principal es continua, se sigue que en dicho abierto también es continua la función $\arg_\pi$. Dado $a \in \mathbb{R}^-$ consideremos la sucesión $\{z_n\}$ dada por $z_n = a + i\,\frac{1}{n}$. Es claro que $\{z_n\} \to a$ y

$$\arg_\pi(z_n) = \arg(z_n) + 2\pi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{na} + \pi + 2\pi \longrightarrow 3\pi \neq \pi = \arg_\pi(a).$$

Luego $\arg_\pi$ no es continua en $\mathbb{R}^-$.

Supongamos que $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Nótese que la función

$$\arg_\alpha : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$

está definida por

$$\arg_\alpha(z) = \begin{cases} \arg(z) + 2\pi & si \quad -\pi < \arg(z) < \alpha \\ \\ \arg(z) & si \quad \alpha \leq \arg(z) \leq \pi \end{cases}$$

Puesto que en el abierto $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ la función argumento principal es continua, se sigue que la función arg_α es continua en los sectores angulares abiertos

$$\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \,:\, -\pi < \arg(z) < \alpha\} \quad \text{y} \quad \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \,:\, \alpha < \arg(z) < \pi\}.$$

Así pues nos falta por estudiar la continuidad en las semirectas

$$\mathbb{R}^- = \{\rho(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) \,:\, \rho > 0\} \quad \text{y} \quad S_\alpha := \{\rho(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \,:\, \rho > 0\}.$$

Dado $a \in \mathbb{R}^-$ tenemos que

$$\lim_{\substack{z\to a\\ -\pi<\arg(z)<\alpha}} \arg_\alpha(z) = \lim_{\substack{z\to a\\ -\pi<\arg(z)<\alpha}} \arg(z) + 2\pi = -\pi + 2\pi = \pi$$

y

$$\lim_{\substack{z\to a\\ \alpha\leq\arg(z)\leq\pi}} \arg_\alpha(z) = \lim_{\substack{z\to a\\ \alpha\leq\arg(z)\leq\pi}} \arg(z) = \pi$$

y por tanto

$$\lim_{z\to a} \arg_\alpha(z) = \pi = \arg_\alpha(a).$$

Luego $\arg_\alpha$ es continua en a. Variando a tenemos que $\arg_\alpha$ es continua en $\mathbb{R}^-$.

Estudiemos la continuidad de $\arg_\alpha$ en la semirecta S_α. Dado $z_0 \in S_\alpha$, teniendo en cuenta la continuidad del argumento principal en z_0, se sigue que

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ -\pi<\arg(z)<\alpha}} \arg_\alpha(z) = \lim_{\substack{z\to a\\ -\pi<\arg(z)<\alpha}} \arg(z) + 2\pi = \arg(z_0) + 2\pi = \alpha + 2\pi$$

y

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \alpha\leq\arg(z)\leq\pi}} \arg_\alpha(z) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ \alpha\leq\arg(z)\leq\pi}} \arg(z) = \arg(z_0) = \alpha$$

y por tanto no existe el

$$\lim_{z\to z_0} \arg_\alpha(z).$$

Luego $\arg_\alpha$ no es continua en z_0. Variando z_0 tenemos que $\arg_\alpha$ no es continua en ningún punto de S_α.

NOTA:

La restricción en el enunciado del ejercicio de que $\alpha \in]-\pi,\pi]$ es innecesaria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos definir para cada $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\arg_\alpha(z) = \mathrm{Arg}\,(z) \cap [\alpha, \alpha + 2\pi[,$$

es decir, $\arg_\alpha(z)$ es el único argumento de z que está en el intervalo

$$[\alpha, \alpha + 2\pi[.$$

Nótese que existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(2k-1)\pi < \alpha \leq (2k+1)\pi$, y que si llamamos $\alpha_0 := \alpha - 2k\pi \in]-\pi, \pi]$, entonces

$$\arg_\alpha(z) = \arg_{\alpha_0}(z) + 2k\pi, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

y por tanto la función

$$\arg_\alpha : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$

es continua en $\mathbb{C}\backslash\{\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \,:\, \rho \geq 0\}$ y discontinua en la semirecta $\{\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \,:\, \rho > 0\}$.

■

Ejercicio Resuelto 26.
Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por:

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} \qquad si \quad z = x + iy \neq 0$$

$$f(0) = 0.$$

Estudia la continuidad y la derivabilidad de f.

Solución.

Las funciones parte real u y parte imaginaria v vienen dadas por:

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} & si (x,y) \neq (0,0) \\ \\ u(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2+y^2} & si (x,y) \neq (0,0) \\ \\ v(0,0) = 0 \end{cases}$$

Puesto que para $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ se tiene que:

$$\left|\frac{x^3 \pm y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \leq |x|+|y|$$

se sigue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = 0$$

Luego u y v son continuas en $(0,0)$

Puesto que ambas son funciones racionales cuyo denominador no se anula en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ se sigue que u y v son continuas en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, f es continua en $\mathbb{C}$

- Estudiemos la derivabilidad de f en 0.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{u(t,0)-u(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{u(0,t)-u(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-\frac{t^3}{t^2}}{t} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{v(t,0)-v(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{v(0,t)-v(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1$$

Luego las parciales de u y de v en $(0,0)$ verifican las condiciones de Cauchy-Riemann. Notemos que, sin embargo, ni u ni v son derivables en $(0,0)$.

En efecto, la candidata a derivada de u en $(0,0)$ es la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$(x,y)\mapsto T(x,y) = (\nabla u(0,0)|(x,y)) = ((1,-1)|(x,y)) = x-y$$

pero, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, la derivada direccional de u en $(0,0)$ según (x,y) vale

$$u'((0,0),(x,y)) = \lim_{t\to 0}\frac{u((0,0)+t(x,t))-u(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3(x^3-y^3)}{t^2(x^2+y^2)}}{t} = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2},$$

y por tanto

$$u'((0,0),(x,y)) \neq T(x,y),$$

salvo cuando $x = 0$, o bien $y = 0$, o bien $y = x$. Luego u no es derivable en $(0,0)$. Análogamente se prueba que v no es derivable en $(0,0)$. En conclusión, f no es derivable en 0.

- Estudiamos la derivabilidad de f en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Puesto que u y v son funciones racionales con denominador

$$x^2 + y^2 \neq 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0),$$

se sigue que ambas son derivables en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y^4 - 3x^2y^2 - 2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^4 + 3y^2x^2 - 2yx^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Veamos si se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \Leftrightarrow \quad x^4 + 2xy^3 = y^4 - 2yx^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & \Leftrightarrow \quad x^4 - 2xy^3 = y^4 + 2yx^3 \end{cases}$$

Sumando ambas expresiones se tiene

$$x^4 = y^4$$

y restando

$$xy^3 = -yx^3$$

de donde se sigue que

$$x = y = 0.$$

Luego no se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en ningún punto de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, y por tanto f no es derivable.

En conclusión, f no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

$\blacksquare$

Ejercicio Resuelto 27.
Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Considérense $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \overline{z} \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ definida por

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

Prueba que f^* es holomorfa en Ω^*.

Solución.
Empecemos notando que puesto que la conjugación compleja es un homeomorfismo de $\mathbb{C}$, también Ω^* es un abierto de $\mathbb{C}$. Dado $a \in \Omega^*$, y elegida una sucesión $\{z_n\}$ en $\Omega^* \backslash \{a\}$ convergente hacia a, teniendo en cuenta la continuidad de la conjugación compleja y la holomorfía de f en $\overline{a}$ se sigue que

$$\frac{f^*(z_n) - f^*(a)}{z_n - a} = \frac{\overline{f(\overline{z_n})} - \overline{f(\overline{a})}}{z_n - a} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z_n}) - f(\overline{a})}{\overline{z_n} - \overline{a}}\right)}$$

converge a $\overline{f'(\overline{a})}$. En consecuencia, f^* es derivable en a y $(f^*)'(a) = \overline{f'(\overline{a})}$. Variando a en Ω^* deducimos que f^* es holomorfa en Ω^* y $(f^*)'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$ para todo $z \in \Omega^*$.

DE OTRA MANERA

Llamemos u y v a las partes real e imaginaria de f, y llamemos u^* y v^* a las partes real e imaginaria de f^*. Como f es holomorfa en Ω sabemos que u y v son derivables en Ω^* y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann. Puesto que $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ se sigue que

$$u^*(x,y) = u(x,-y) \quad \text{ y } \quad v^*(x,y) = v(x,-y).$$

Luego la derivabilidad de u y v en Ω repercute en la derivabilidad de u^* y v^* en Ω^*. Además, ya que

$$\tfrac{\partial u^*}{\partial x}(x,y) = \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,-y) \qquad \tfrac{\partial u^*}{\partial y}(x,y) = -\tfrac{\partial u}{\partial y}(x,-y)$$

$$\tfrac{\partial v^*}{\partial x}(x,y) = -\tfrac{\partial v}{\partial x}(x,-y) \qquad \tfrac{\partial v^*}{\partial y}(x,y) = \tfrac{\partial v}{\partial y}(x,-y)$$

las condiciones de Cauchy-Riemann para u y v dan las condiciones de Cauchy-Riemann para u^* y v^*. Luego f^* es holomorfa en Ω^*. Además, dado $z = x + iy \in \Omega^*$ sabemos que

$$(f^*)'(z) = \frac{\partial u^*}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v^*}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-iy) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y) =$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}(x,-y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y)}=\overline{f'(x-iy)}=\overline{f'(\overline{z})}.$$

■

Ejercicio Resuelto 28.
Sea f una función compleja definida en un abierto no vacío Ω de $\mathbb{C}$ y sea $z_0=a+ib\in\Omega$. Pongamos $u=\mathrm{Re}\ (f),\ v=\mathrm{Im}\ (f)$ y supongamos que u y v son derivables en (a,b). Prueba que si existe el límite

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$$

entonces, o bien f o bien $\bar{f}$ es derivable en z_0.

Solución.
Como por hipótesis u y v son derivables en (a,b), si llamamos:

$$\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}(a,b),\quad \beta=\frac{\partial u}{\partial y}(a,b),\quad \gamma=\frac{\partial v}{\partial x}(a,b),\quad \delta=\frac{\partial v}{\partial y}(a,b),$$

las aplicaciones derivadas de u y v en (a,b) vienen dadas como sigue:
$Du(a,b):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es la aplicación lineal dada por

$$Du(a,b)(x,y)=(\nabla u(a,b)|(x,y))=((\alpha,\beta)|(x,y))=\alpha x+\beta y.$$

$Dv(a,b):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es la aplicación lineal dada por

$$Dv(a,b)(x,y)=(\nabla v(a,b)|(x,y))=((\gamma,\delta)|(x,y))=\gamma x+\delta y.$$

Escribamos, para cada $z=x+iy\in\Omega\backslash\{z_0\}$,

$$c_z=\frac{Du(a,b)(x-a,y-b)+iDv(a,b)(x-a,y-b)}{|z-z_0|}$$

y notemos que:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|}-c_z=\frac{u(x,y)-u(a,b)+i(v(x,y)-v(a,b))}{|z-z_0|}-c_z=$$

$$\frac{u(x,y)-u(a,b)-Du(a,b)(x-a,y-b)}{||(x,y)-(a,b)||}+$$

$$i\ \frac{v(x,y)-v(a,b)-Dv(a,b)(x-a,y-b)}{||(x,y)-(a,b)||},$$

y que por tanto

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|}-c_z\right)=0.$$

Como quiera que

$$c_z=\frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|}-\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|}-c_z\right),$$

y por tanto

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|-\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|}-c_z\right|\le |c_z|\le$$

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|+\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|}-c_z\right|,$$

se sigue de lo anterior y de la hipótesis que

$$\exists\ \lim_{z\to z_0}|c_z|=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|,$$

y por tanto también,

$$\exists\ \lim_{z\to z_0}|c_z|^2.$$

Como quiera que

$$|c_z|^2=\frac{Du(a,b)(x-a,y-b)^2+Dv(a,b)(x-a,y-b)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2}=$$

$$=\frac{\alpha^2(x-a)^2+\beta^2(y-b)^2+2\alpha\beta(x-a)(y-b)+\gamma^2(x-a)^2+\delta^2(y-b)^2+2\gamma\delta(x-a)(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}=$$

$$=\frac{(\alpha^2+\gamma^2)(x-a)^2+(\beta^2+\delta^2)(y-b)^2+2(\alpha\beta+\gamma\delta)(x-a)(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

se tiene que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y=b}}|c_z|^2=\alpha^2+\gamma^2,\qquad \lim_{\substack{y\to b\\ x=a}}|c_z|^2=\beta^2+\delta^2$$

$$\lim_{x-a=y-b\to 0} |c_z|^2 = \frac{1}{2}\left[(\alpha^2+\gamma^2)+(\beta^2+\delta^2)+2(\alpha\beta+\gamma\delta)\right].$$

La existencia de límite global da que los anteriores límites direccionales coinciden, y por tanto

$$\left.\begin{cases} \alpha^2+\gamma^2=\beta^2+\delta^2 & \Rightarrow \quad \alpha^2-\delta^2-(\beta^2-\gamma^2)=0 \\ \alpha\beta+\gamma\delta=0 & \Rightarrow \quad (\beta+\gamma)(\alpha+\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=0 \end{cases}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$[(\alpha-\delta)+i(\beta+\gamma)]\,[(\alpha+\delta)+i(\beta-\gamma)]=0 \qquad \Rightarrow$$

Ahora se pueden dar dos posibilidades:

$$(\alpha-\delta)+i(\beta+\gamma)=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\delta, \quad \beta=-\gamma \quad \Rightarrow \quad f \text{es derivable en } z_0$$

ó

$$(\alpha+\delta)+i(\beta-\gamma)=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-\delta, \quad \beta=\gamma \quad \Rightarrow \quad \bar{f} \text{es derivable en } z_0$$

■

Ejercicio Resuelto 29.
Calcula una función $f \in H(\mathbb{C})$ tal que

$$\text{Re } f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Si se exige que sea $f(0)=0$, entonces dicha función es única.

Solución.
Escribamos

$$u(x,y) = \text{Re } f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = \text{Im } f(x+iy).$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2,$$

y por las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

se sigue que

$$v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + \varphi(x),$$

para conveniente función derivable φ.

Por tanto,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3 + \varphi'(x).$$

Puesto que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3,$$

y de nuevo por las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

se deduce que $\varphi'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Luego existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = a$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En consecuencia,

$$f(x + iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3 + a) = (x + iy)^4 + ia.$$

Luego las funciones que verifican el enunciado son las funciones

$$f(z) := z^4 + ia \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Si $f(0) = 0$, entonces obligadamente $a = 0$, y por tanto

$$f(z) = z^4.$$

■

1.5.2. Ejercicios Resueltos (pp. 51-52)

Ejerc. 30 - 40

Ejercicio Resuelto 30.
Calcula la función límite puntual de la sucesión de funciones

$$f_n(z) = n(\sqrt[n]{z} - 1)$$

donde $\sqrt[n]{z}$ *indica la raíz n-ésima principal de z.*

Solución.
Dado $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, sea $\theta = \arg(z)$, y notemos que

$$f_n(z) = n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right) = n\left(\sqrt[n]{|z|}\ (\cos\frac{\theta}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{n}) - 1\right) =$$

$$n\left(\sqrt[n]{|z|}\ \cos\frac{\theta}{n} - 1\right) + i\, n\, \sqrt[n]{|z|}\ \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{n}.$$

Estudiemos el límite de las partes real e imaginaria

$$n\left(\sqrt[n]{|z|}\ \cos\frac{\theta}{n} - 1\right) = n\left(\sqrt[n]{|z|}\ \cos\frac{\theta}{n} - \cos\frac{\theta}{n} + \cos\frac{\theta}{n} - 1\right) =$$

$$n\left(\sqrt[n]{|z|} - 1\right)\cos\frac{\theta}{n} + n\left(\cos\frac{\theta}{n} - 1\right) =$$

$$= n\left(\sqrt[n]{|z|} - 1\right)\cos\frac{\theta}{n} + \theta\ \frac{\cos\frac{\theta}{n} - 1}{\frac{\theta}{n}}.$$

Puesto que

$$\begin{cases} n(\sqrt[n]{|z|} - 1) \to \log|z| & (\text{ por la regla } 1^{\infty}) \\ \cos\dfrac{\theta}{n} \to 1 & \\ \dfrac{\cos\frac{\theta}{n} - 1}{\frac{\theta}{n}} \to 0 \ \text{ ya que } \ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \cos'(0) = 0 & \end{cases}$$

se sigue de lo anterior que

$$n\left(\sqrt[n]{|z|}\ \cos\frac{\theta}{n} - 1\right) \quad \to \quad \log|z|.$$

Por otro lado, escribiendo

$$n\sqrt[n]{|z|}\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{n} = \sqrt[n]{|z|}\ \theta\ \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{n}}{\frac{\theta}{n}}$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} \sqrt[n]{|z|} \to 1 \text{ por el criterio de la raíz} \\ \\ \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)}{\frac{\theta}{n}} \to 1 \text{ ya que } \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \operatorname{sen}'(0) = 1 \end{cases}$$

vemos que

$$n\sqrt[n]{|z|}\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{n} \quad \to \quad \theta.$$

Luego

$$f_n(z) \quad \to \quad \log|z| + i\,\theta = \log z.$$

■

Ejercicio Resuelto 31.
Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{2z-i}{2+iz}\right)^n \qquad (z\neq 2i)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Solución.
Convendría empezar estudiando la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}z^n.$$

Como

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1,$$

se sigue que $R=1$, y por tanto, dicha serie converge absolutamente en $D(0,1)$ y converge uniformemente en los discos $\bar{D}(0,\rho)$ con $0<\rho<1$. En la circunferencia unidad, es claro que no converge en $z = 1$, sin embargo, para $z \neq 1$, (esto es, $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ con $\theta \in]-\pi, \pi]\backslash\{0\}$) tenemos que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cos(n\theta) + i \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\theta)$$

y como quiera que las series

$$\sum_{n\geq 1} \cos(n\theta), \ \sum_{n\geq 1} \operatorname{sen}(n\theta)$$

tienen sumas parciales acotadas (Ejercicio resuelto 14 (pág. 18)) y $\{\frac{1}{n}\} \searrow 0$, se sigue por el Criterio particular de Dirichlet (p. 29) que ambas series convergen.

Pasando al estudio de la serie del enunciado, nótese que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}\backslash\{2i\} & \rightarrow & \mathbb{C}\backslash\{-2i\} \\ z & \mapsto & \varphi(z) = \frac{2z-i}{2+iz} \end{array}$$

es una biyección biholomorfa cuya inversa es:

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1} : \mathbb{C}\backslash\{-2i\} & \rightarrow & \mathbb{C}\backslash\{2i\} \\ z & \mapsto & \varphi^{-1}(z) = \frac{2z+i}{2-iz} \end{array}$$

Cálculo de φ^{-1}

$$w = \frac{2z-i}{2+iz}; \quad w(2+iz) = 2z - i; \quad 2w + izw = 2z - i;$$

$$2w + i = z(2 - iw); \quad z = \frac{2w+i}{2-iw}$$

Además, si $|z| = 1$, entonces:

$$|\varphi(z)| = \left|\frac{2z-i}{2+iz}\right| = \left|\frac{2z-i}{2z\bar{z}+iz}\right| = \left|\frac{1}{z}\frac{2z-i}{2\bar{z}+i}\right| = \frac{1}{|z|}\ \left|\frac{2z-i}{\overline{\overline{2z-i}}}\right| = 1$$

y

$$|\varphi^{-1}(z)| = \left|\frac{2z+i}{2-iz}\right| = \left|\frac{2z+i}{2z\bar{z}-iz}\right| = \left|\frac{1}{z}\frac{2z+i}{2\bar{z}-i}\right| = \frac{1}{|z|}\left|\frac{2z+i}{\overline{2z+i}}\right| = 1$$

Luego φ deja invariante la circunferencia unidad.

Puesto que $\varphi(0) = -\dfrac{i}{2} \in D(0,1)$, por motivos de conexión, se sigue que

$$\varphi(D(0,1)) = D(0,1) \qquad \text{y} \qquad \varphi(\mathbb{C}\backslash\bar{D}(0,1)) = \mathbb{C}\backslash\bar{D}(0,1).$$

En conclusión, teniendo en cuenta el estudio de la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}z^n$ podemos afirmar que la serie del enunciado:

Converge absolutamente en $D(0,1)$

Converge uniformemente en $\bar{D}(0,\rho), \quad 0 < \rho < 1$

Converge puntualmente en todo punto de $C(0,1)$, excepto en el punto

$$\varphi^{-1}(1) = \frac{2+i}{2-i} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

No converge puntualmente en $\mathbb{C}\backslash\bar{D}(0,1)$.

■

Ejercicio Resuelto 32.
Justifica que la serie

$$\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

converge absoluta y uniformemente en los compactos contenidos en $D(0,1)$ *y en los compactos contenidos en* $\mathbb{C}\backslash\overline{D}(0,1)$. *Calcula la suma de dicha serie.*

Solución.
Veamos que converge absoluta y uniformemente en $\bar{D}(0,\rho)$ $(0 < \rho < 1)$.

Si $|z| \leq \rho$, entonces

$$|z^n| = |z|^n \leq \rho^n, \quad |1-z^n| \geq 1-|z|^n \geq 1-\rho^n \geq 1-\rho,$$

y

$$|1-z^{n+1}| \geq 1-|z|^{n+1} \geq 1-\rho^{n+1} \geq 1-\rho,$$

y por tanto

$$\left|\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}\right| \leq \frac{\rho^n}{(1-\rho)^2}.$$

Como quiera que la serie numérica

$$\sum \frac{\rho^n}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2}\sum \rho^n$$

es convergente (serie geométrica de razón $\rho < 1$), por el criterio de la mayorante de Weierstrass (p. 45), la serie de funciones del enunciado converge absoluta y uniformemente en $\bar{D}(0,\rho)$.

Veamos que la serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{C}\backslash D(0,\rho)$ para $1 < \rho < +\infty$.

Si $|z| \geq \rho$, entonces $|\frac{1}{z}| \leq \frac{1}{\rho}$, y usando las mismas cotas que antes tenemos que

$$\left|\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}\right| = \left|\frac{\frac{z^n}{z^{2n+1}}}{\frac{(1-z^n)(1-z^{n+1})}{z^{2n+1}}}\right| = \frac{\left|\frac{1}{z}\right|^{n+1}}{\left|(\frac{1}{z^n}-1)(\frac{1}{z^{n+1}}-1)\right|} \leq \frac{(\frac{1}{\rho})^{n+1}}{(1-\frac{1}{\rho})^2}$$

Como quiera que la serie

$$\sum \frac{(\frac{1}{\rho})^{n+1}}{(1-\frac{1}{\rho})^2} = \frac{\frac{1}{\rho}}{(1-\frac{1}{\rho})^2}\sum (\frac{1}{\rho})^n$$

es convergente (por ser una serie geométrica de razón $\frac{1}{\rho} < 1$), se sigue por el criterio de la mayorante de Weierstrass que la serie de funciones del enunciado converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{C}\backslash D(0,\rho)$ $(1 < \rho < +\infty)$.

Calculemos la función suma

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash C(0,1) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} \end{array}$$

Nótese que para $z \in \mathbb{C}\backslash C(0,1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \frac{(1-z)z^n}{(1-z)(1-z^n)(1-z^{n+1})} =$$

$$\frac{1}{1-z}\,\frac{z^n - z^{n+1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \frac{1}{1-z}\,\frac{(1-z^{n+1})-(1-z^n)}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} =$$

$$\frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{1-z^n} - \frac{1}{1-z^{n+1}}\right).$$

Por tanto

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{(1-z^k)(1-z^{k+1})} = \frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{n+1}}\right).$$

Puesto que para $|z| < 1$ se tiene que $\{z^{n+1}\} \to 0$, se sigue que

$$S_n(z) \to \frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{1-z} - 1\right) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Para $|z| > 1$ se tiene que $\{z^{n+1}\} \to \infty$, y por tanto $\{\frac{1}{1-z^{n+1}}\} \to 0$, se sigue que

$$S_n(z) \to \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Luego

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{(1-z)^2} & \text{si} \quad |z| < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{(1-z)^2} & \text{si} \quad |z| > 1 \end{cases}$$

■

Ejercicio Resuelto 33.
Justifica que la serie

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{z+n}$$

converge puntualmente en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$. Indica conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Solución.
Veamos que para cada $\rho > 0$ la serie converge uniformemente en

$$A_\rho := \bar{D}(0,\rho)\backslash\mathbb{Z}.$$

Puesto que para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ se tiene que

$$\frac{1}{z+n} = \frac{x+n-i\,y}{(x+n)^2+y^2} = \frac{x+n}{(x+n)^2+y^2} + i\,\frac{-y}{(x+n)^2+y^2}$$

nos bastará verificar la convergencia uniforme en A_ρ de las series parte real y parte imaginaria, incluso renunciando en ambas a un número prefijado de términos iniciales. Concretamente, si

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} : \rho < k\}$$

vamos a demostrar la convergencia uniforme en A_ρ de las series:

$$(1) \quad \sum_{n\geq 2m} (-1)^{n+1}\frac{x+n}{(x+n)^2+y^2} \quad y \quad (2) \quad \sum_{n\geq m+1} (-1)^n \frac{y}{(x+n)^2+y^2}$$

Estudiemos en primer lugar (2):
Puesto que $\forall n \geq m+1 \;\; y \;\; \forall z = x+iy \in A_\rho$ se tiene que

$$|y| \leq \rho$$

y

$$|z+n| \geq n - |z| \geq n - \rho > 0 \qquad \Rightarrow \qquad (x+n)^2 + y^2 = |z+n|^2 \geq (n-\rho)^2\ ,$$

se sigue que $\forall z = x+iy \in A_\rho$ se verifica que

$$\sum_{n\geq m+1} \left|(-1)^n \frac{y}{(x+n)^2+y^2}\right| \leq \sum_{n\geq m+1} \frac{\rho}{(n-\rho)^2}.$$

Como quiera que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\rho}{(n-\rho)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho n^2}{(n-\rho)^2} = \rho,$$

por el criterio de comparación por paso al límite, se sigue que también la serie $\sum \frac{\rho}{(n-\rho)^2}$ converge.

Ahora, por el criterio de la mayorante de Weierstrass, se sigue que la serie (2) converge absoluta y uniformemente en A_ρ.

Estudiemos ahora la serie (1):
Nótese que para cada número real prefijado y, la función

$$t \mapsto \frac{t}{t^2 + y^2}$$

es estrictamente decreciente en el intervalo $]|y|, +\infty[$ y tiene

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{t^2 + y^2} = 0.$$

Concretamente, su gráfica es:

Nótese también que si $z = x + iy \in A_\rho \;\; y \;\; n \geq 2m$, entonces:

$$x + n \geq x + 2m > -\rho + 2m > m > |y|,$$

luego, por la anterior observación, la sucesión

$$\left\{ \frac{x+n}{(x+n)^2 + y^2} \right\}$$

es estrictamente decreciente y convergente a 0. Por tanto, por el Criterio de Leibnitz, para cada $z = x + iy \in A_\rho$, la serie

$$\sum_{n \geq 2m} (-1)^n \frac{x+n}{(x+n)^2 + y^2}$$

es convergente.

En este momento recordemos que es bien conocido y fácil de probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales positivos que es decreciente y convergente a cero, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ el resto n-ésimo de la serie alternada $\sum (-1)^n x_n$ está mayorado por x_{n+1}, esto es

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x_k \right| \leq x_{n+1}.$$

Este hecho nos permite probar la convergencia uniforme de la serie (1) en A_ρ ya que para cada $n \geq 2m$ y para cada $z = x + iy \in A_\rho$ tenemos que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x+k}{(x+k)^2 + y^2} \right| \leq \frac{x+n+1}{(x+n+1)^2 + y^2} \leq$$

$$\frac{x+n+1}{(x+n+1)^2} = \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{-\rho+n+1} \quad \rightarrow \quad 0.$$

Así, la sucesión de restos converge uniformemente a 0 en A_ρ, y por tanto la serie (1) converge uniformemente a su suma en A_ρ.

Finalmente, de la convergencia uniforme de la serie del enunciado en los conjuntos A_ρ con $\rho > 0$ se deduce la convergencia puntual de dicha serie en $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$.

Otros conjuntos de convergencia uniforme

Dado α con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, veamos que la serie converge uniformemente en el sector angular

$$S_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : |arg(z)| \leq \alpha\}.$$

Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\operatorname{dist}(-n, S_\alpha) = n \operatorname{sen}(\pi - \alpha).$$

Luego, para cualquier $z \in S_\alpha$,

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z+n+1}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{|z+n|\,|z+n+1|} \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2\operatorname{sen}^2(\pi-\alpha)}.$$

Como quiera que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2\operatorname{sen}^2(\pi-\alpha)}$ es convergente, por el Criterio de la mayorante de Weierstrass, se sigue que la serie

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z+n+1}\right|$$

es uniformemente convergente en S_α.

Además, para todo $z \in S_\alpha$, se tiene que

$$\left|\frac{1}{z+n}\right| \leq \frac{1}{nsen(\pi-\alpha)} \quad \to \quad 0.$$

Luego la sucesión $\{\dfrac{1}{z+n}\}$ converge uniformemente a 0 en S_α.

Finalmente aplicando el criterio general de Dirichlet (Ejercicio 46, pág. 58), tomando las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dadas por

$$f_n(z) = (-1)^{n+1} \;\; y \;\; g_n(z) = \frac{1}{z+n},$$

obtenemos que la serie

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{z+n}$$

converge uniformemente en S_α.

■

Ejercicio Resuelto 34.
Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n+a^n)\,z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{\log n} z^n.$

Solución.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$

$$c_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} \geq 0$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n}$$

Como quiera que

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e \quad \text{y} \quad \left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} \to e^{-1}$$

se sigue que

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = e \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{e}$$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n+a^n)\, z^n$

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|n+1+a^{n+1}|}{|n+a^n|}.$$

Si $|a| \leq 1$, entonces

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|1+\frac{1}{n}+\frac{a^{n+1}}{n}|}{|1+\frac{a^n}{n}|} \quad \to \quad 1, \quad \text{luego} \quad R = 1.$$

Si $|a| > 1$, entonces

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|\frac{n+1}{a^{n+1}}+1|}{|\frac{n}{a^{n+1}}+\frac{1}{a}|} \quad \to \quad |a|, \quad \text{luego} \quad R = \frac{1}{|a|}.$$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{\log n} z^n$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = n^{\frac{\log n}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}\log n} = e^{\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)^2}.$$

Por la escala de infinitos

$$\lim \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0,$$

luego

$$\lim \sqrt[n]{|c_n|} = e^0 = 1,$$

y por tanto $R = 1$.

$\blacksquare$

Ejercicio Resuelto 35.
Los radios de convergencia de las series

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad y \qquad \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

son respectivamente R_1, R_2 *con* $0 < R_1, R_2 < +\infty$*. ¿Qué se puede decir de los radios de convergencia de las series*

$$\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n \qquad y \qquad \sum_{n\geq 0} a_n b_n z^n \quad ?.$$

Solución.
-Es claro que la serie de potencias $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ tiene radio de convergencia

$$R \geq \min\{R_1, R_2\}$$

y que, para todo z con $|z| < \min\{R_1, R_2\}$ se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Puede darse la igualdad: Por ejemplo, si $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, entonces $R_2 = 2R_1$, mientras que $R = R_1$

Puede darse la desigualdad estricta: Por ejemplo, si $b_n = -a_n$, entonces $R_2 = R_1$, mientras que $R = +\infty$

-Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sqrt[n]{|a_n b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,\sqrt[n]{|b_n|}$$

se sigue inmediatamente que

$$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq (\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|})\,(\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|b_n|})$$

de donde, pasando a inversos, se obtiene que la serie $\sum a_n b_n z^n$ tiene radio de convergencia

$$R \geq R_1 R_2$$

Puede darse la igualdad: Por ejemplo, si $b_n = a_n$, entonces $R_2 = R_1$ y $R = R_1 R_2$.

Puede darse la desigualdad estricta: Por ejemplo, para las series $\sum z^{2n}$ y $\sum z^{2n+1}$ se tiene que, $R_1 = R_2 = 1$ y la serie producto es la constantemente cero, y por tanto $R = +\infty$. ■

Ejercicio Resuelto 36.
Sabiendo que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

es R, con $0 < R < +\infty$, calcular el radio de convergencia de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^k c_n z^n \quad (k \in \mathbb{N})$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n^k z^n \quad (k \in \mathbb{N})$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (1 + a^n) c_n z^n \quad (a \in \mathbb{C})$.

Solución.

(a) $\sum\limits_{n\geq 0} n^k c_n z^n \quad (k \in \mathbb{N})$

Puesto que $\sqrt[n]{n^k} \to 1$, se sigue que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n^k |c_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

y, por tanto, $\sum\limits_{n\geq 0} n^k c_n z^n$ tiene el mismo radio que $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$.

(b) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} z^n$

Puesto que

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to +\infty,$$

por el criterio de la raíz $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$, y por tanto, como $\sqrt[n]{|c_n|}$ está acotada,

$$\sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!}} = \frac{\sqrt[n]{|c_n|}}{\sqrt[n]{n!}} \to 0.$$

Luego, el radio de convergencia de $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} z^n$ es $+\infty$.

(c) $\sum\limits_{n\geq 0} c_n^k z^n \quad (k \in \mathbb{N})$

Puesto que $\sqrt[n]{|c_n^k|} = \left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)^k$, de la continuidad de la función $x \mapsto x^k$, se sigue que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n^k|} = \left(\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^k.$$

Luego, el radio de convergencia de $\sum\limits_{n\geq 0} c_n^k z^n$ es R^k.

(d) $\sum_{n\geq 0}(1+a^n)c_n z^n \quad (a\in\mathbb{C})$

Si $|a|<1$, entonces $|a|^n\to 0$, por tanto $a^n\to 0$, y por consiguiente

$$\frac{|1+a^{n+1}|}{|1+a^n|}\to 1.$$

Ahora, por el Criterio de la raíz,

$$\sqrt[n]{|1+a^n|}\to 1.$$

Por tanto,

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|1+a^n||c_n|}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|},$$

y en consecuencia, el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0}(1+a^n)c^n z^n$ sigue siendo R.

Si $|a|>1$, entonces $\dfrac{1}{|a|}<1$, y razonando como antes $\dfrac{1}{a^n}\to 0$. Luego

$$\frac{|1+a^{n+1}|}{|1+a^n|}=\frac{|\frac{1}{a^n}+a|}{|\frac{1}{a^n}+1|}\to |a|,$$

y por el criterio de la raíz

$$\sqrt[n]{|1+a^n|}\to |a|,$$

y por tanto

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|1+a^n||c_n|}=|a|\ \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}.$$

Luego el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0}(1+a^n)c_n z^n$ es en este caso $\dfrac{R}{|a|}$.

Si $|a|=1$, entonces $|1+a^n|\leq 1+|a|^n=2$, y por tanto

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|1+a^n||c_n|}\leq\overline{\lim}\sqrt[n]{2}\ \ \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{R}.$$

Luego el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0}(1+a^n)c_n z^n$ es mayor o igual que R.

Además puede ser estrictamente más grande. Piénsese en el caso $a = -1$ y $c_n = 0$ para n par.

■

Ejercicio Resuelto 37.
Estudiar el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de las series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{z^n}{\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{z^n}{n}.$

Solución.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{z^n}{\sqrt{n}}$

$$c_n = \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right)\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}} =$$

$$\left(1+\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}\right)\sqrt{\frac{n}{n+1}} \quad\rightarrow\quad 1.$$

Luego el radio de convergencia es $R = 1$

- La serie no converge en z=1, ya que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$$

y la serie armónica $\displaystyle\sum\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ no converge.

- Veamos que $\{c_n\}$ converge a cero y es decreciente.

Llamando $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ y $b_n = \sqrt{n}$, tenemos que

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{1}{(n+1)^2} \; \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{n+1-n} =$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \; (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \frac{n}{(n+1)^2} \; \left(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \quad \to \quad 0,$$

luego, por el Criterio de Stolz, $\{c_n\} \to 0$.

- Veamos que $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1} < c_n$, esto es:

$$\left(1 + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \; \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \; \left(1 + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \; \frac{1}{\sqrt{n}}$$

equivalentemente

$$\frac{1}{(n+1)^2} \; \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \; \left(1 + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \; \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Para ello es suficiente que

$$\frac{1}{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$$

$$1 + \frac{1}{(n+1)^2} < \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

$$(n+1)^2 + 1 < (n+1)^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

$$((n+1)^2 + 1)^2 < (n+1)^4 (1 + \frac{1}{n})$$

$$(n+1)^4 + 2(n+1)^2 + 1 < (n+1)^4 + (n+1)^4 \frac{1}{n}$$

$$2n(n+1)^2 + n < (n+1)^4$$

$$2n^3 + 4n^2 + 2n < n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

lo cual es claramente cierto.

Ahora, por el Teorema de Picard (Ejercicio 49), la serie converge en $C(0,1)\backslash\{1\}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{z^n}{n}$

$$c_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \frac{1}{n}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) \frac{1}{n+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right) \frac{n}{n+1} \quad \rightarrow \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Luego el radio de convergencia es $R = 1$.

La serie no converge en $z = 1$, ya que:

$$\frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}$$

y la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ no converge.

- Veamos que $\{c_n\}$ converge a cero y es decreciente.

Llamando $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ y $b_n = n$, tenemos que

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{n + 1 - n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

luego, por el criterio de Stolz, $\{c_n\} \rightarrow 0$

- Veamos que $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1} < c_n$, esto es:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{n+1} < \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Para ello es suficiente que

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

$$n(n+1) < (n+1)^2,$$

lo cual es claramente cierto.

Ahora, por el teorema de Picard (Ejercicio 49), la serie converge en $C(0,1)\backslash\{1\}$.

■

Ejercicio Resuelto 38.
Justifica que la serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *donde*

$$a_{3^n} = \frac{1}{n}, \qquad a_{2\cdot 3^n} = \frac{-1}{n}, \qquad a_n = 0 \quad \textit{en otro caso},$$

converge en todo punto del conjunto

$$A = \{e^{\frac{2k\pi i}{3^m}} \ : \ m \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{Z}\}$$

y no converge en ningún punto de

$$B = \{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{3^m}} \ : \ m \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Justifica que A y B son densos en la circunferencia unidad.

Solución.
El radio de convergencia es 1 ya que

$$\sqrt[3^n]{n} = n^{\frac{1}{3^n}} = e^{\frac{\log n}{3^n}} \to e^0 = 1$$

$$\sqrt[2\cdot 3^n]{n} = n^{\frac{1}{2\cdot 3^n}} = e^{\frac{\log n}{2\cdot 3^n}} \to e^0 = 1.$$

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$ notemos que

$$S_{2\cdot 3^n}(z) = \sum_{k=1}^{2\cdot 3^n} a_k z^k = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{3^k} z^{3^k} + a_{2\cdot 3^k} z^{2\cdot 3^k} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} z^{3^k} - \frac{1}{k} z^{2\cdot 3^k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^{3^k} \left(1 - z^{3^k}\right).$$

Notemos también que si $z = e^{\frac{2j\pi i}{3^m}}$ para $m \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\forall k \geq m \quad z^{3^k} = e^{2j\pi i 3^{k-m}} = 1.$$

Luego, $\forall n \geq m$ se verifica que

$$S_{2\cdot 3^n}(z) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} z^{3^k} (1 - z^{3^k})$$

y

$$S_{3^{n+1}}(z) = S_{2\cdot 3^n}(z) + a_{3^{n+1}} z^{3^{n+1}} = S_{2\cdot 3^n}(z) + \frac{1}{n+1}$$

Por consiguiente, la sucesión de sumas parciales converge, esto es, la serie converge, y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} z^{3^k} (1 - z^{3^k}).$$

- Si $z = e^{\frac{(2j+1)\Pi i}{3^m}}$ para $m \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\forall k \geq m \quad z^{3^k} = e^{(2j+1)\pi i 3^{k-m}} = -1$$

luego, $\forall n \geq m$ se verifica que

$$S_{2\cdot 3^n}(z) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} z^{3^k} - \sum_{k=m}^{n} \frac{2}{k}$$

y por tanto, la sucesión de sumas parciales no converge.

- Finalmente, nótese que los conjuntos

$$A' = \{\frac{2k\pi}{3^m} : m \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{Z}\} \;\; y \;\; B' = \{\frac{(2k+1)\pi}{3^m} : m \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{Z}\}$$

son subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$ tales que

$$\inf(A' \cap \mathbb{R}^+) = \inf(A' \cap \mathbb{R}^+) = 0.$$

Luego por $(*)$ (lo demostraremos a continuación) A' y B' son densos en $\mathbb{R}$. Puesto que

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \rightarrow & C(0,1) \\ t & \mapsto & \varphi(t) = e^{it} \end{array}$$

es sobreyectiva y continua, se sigue que

$$\overline{A} = \overline{\varphi(A')} \supseteq \varphi(\overline{A'}) = \varphi(\mathbb{R}) = C(0,1)$$

y

$$\overline{B} = \overline{\varphi(B')} \supseteq \varphi(\overline{B'}) = \varphi(\mathbb{R}) = C(0,1),$$

y por tanto

$$\overline{A} = \overline{B} = C(0,1).$$

Vamos finalmente a demostrar el siguiente resultado:

$(*)$ *Todo grupo aditivo S de $\mathbb{R}$ es discreto o denso. Concretamente, si $S \neq 0$, y denotamos por $S^+ = S \cap \mathbb{R}^+$ y por $\alpha = \inf S^+$, entonces:*

$$\begin{array}{lll} S = \alpha\mathbb{Z} & \textit{(luego discreto)} & \textit{cuando} \ \ \alpha > 0 \\ y & & \\ S \ \ \textit{es denso en } \mathbb{R} & & \textit{cuando} \ \ \alpha = 0. \end{array}$$

Demostración.

Sea S un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$. Es claro que

$$S = -S^+ \cup \{0\} \cup S^+$$

y por tanto $S = 0 \Leftrightarrow S^+ = \emptyset$.

Supongamos que $S \neq 0$.

- Veamos que si $\alpha > 0$, entonces:

$$S = \alpha\mathbb{Z}$$

[$\supseteq$]

Puesto que $\alpha > 0$, 0 es un punto aislado de S. Como las traslaciones son homeomorfismos, se sigue que todos los elementos de S son aislados. En consecuencia, $\alpha = \min S^+$, y por tanto $\alpha\mathbb{Z} \subseteq S$.

[$\subseteq$]

Si $x \in S \backslash \alpha\mathbb{Z} \Rightarrow |x| \in S^+ \backslash \alpha\mathbb{N} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : (n-1)\alpha < |x| < n\alpha$. Luego

$$0 < |x| - (n-1)\alpha < \alpha$$

y

$$|x| - (n-1)\alpha \in S^+,$$

lo que contradice que $\alpha = \inf S^+$.

- Supongamos que $\alpha = 0$. Veamos que, para todo intervalo $\emptyset \neq]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ existe $x \in S \cap]a, b[$

En efecto:

- Si $0 \in]a, b[$, la afirmación es clara ya que $0 \in S$.

- Si $]a, b[\subseteq \mathbb{R}^+$ distinguimos dos casos:

1) $a = 0$.

En este caso el resultado se sigue del hecho de que $0 = \inf S^+$ conlleva que 0 es un punto de acumulación de S^+

2) $a > 0$.

En este caso tomemos

$$y \in S^+ : y < a, \quad y < b - a \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N} : ny \leq a < (n+1)y.$$

Se tiene entonces que:

$$a < (n+1)y = ny + y < a + (b-a) = b.$$

- Si $]a, b[\subseteq \mathbb{R}^-$, entonces $]-b, -a[\subseteq \mathbb{R}^+$, y por el caso anterior

$$\exists x \in S : \quad -b < x < -a$$

luego

$$a < -x < b.$$

$\blacksquare$

Ejercicio Resuelto 39.
Expresa $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ *como suma de una serie de potencias.*

Solución.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Derivando

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Volviendo a derivar

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Luego

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

$\blacksquare$

Ejercicio Resuelto 40.
Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *una función inyectiva en* $D(0,1)$. *Prueba que, para* $0 < r < 1$, *el área del conjunto*

$$A(r) = f(D(0,r))$$

es igual a

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \mid c_n \mid^2 r^{2n}.$$

Solución.

Por el Teorema de inversión global (Teorema 3.36) f es una biyección biholomorfa de $D(0,1)$ sobre $f(D(0,1))$, y por tanto la aplicación

$$(x,y) \longrightarrow (u(x,y), v(x,y))$$

es un difeomorfismo de clase C^1 de $D(0,1)$ sobre $f(D(0,1))$. Además, teniendo en cuenta la descripción de la derivada de f y las condiciones de Cauchy-Riemann, se sigue que el determinante jacobiano de dicho difeomormismo viene dado por

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \mid f'(x+iy) \mid^2 \neq 0.$$

Dado $r \in]0,1[$, por el Teorema del cambio de variable tenemos que

$$\lambda(A(r)) = \int_{A(r)} 1 \, d\lambda = \int_{D(0,r)} \mid f'(x+iy) \mid^2 \, d(x,y).$$

Ahora, por el Teorema del cambio de variable, pasando a coordenadas polares, tenemos que

$$\lambda(A(r)) = \int_{]0,r[\times]-\pi,\pi[} \rho \mid f'(\rho e^{i\theta}) \mid^2 \, d(\varrho,\theta).$$

Por el Teorema de Fubini

$$\lambda(A(r)) = \int_0^r \left(\int_{-\pi}^{\pi} \rho \mid f'(\rho e^{i\theta}) \mid^2 \, d\theta\right) d\varrho = \int_0^r \rho \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mid f'(\rho e^{i\theta}) \mid^2 \, d\theta\right) d\varrho.$$

Puesto que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \, c_n z^{n-1}, \qquad \forall z \in D(0,1),$$

por la fórmula de Parseval (Ejercicio resuelto 51) se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid f'(\rho e^{i\theta}) \mid^2 \, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 \varrho^{2(n-1)}.$$

Luego

$$\lambda(A(r)) = \int_0^r \rho \left(2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 \varrho^{2(n-1)} \right) d\varrho =$$

$$2\pi \int_0^r \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 \varrho^{2n-1} \right) d\varrho.$$

Nótese que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 z^{2n-1}$ tiene igual radio de convergencia que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ya que

$$\sqrt[2n-1]{n^2 \mid c_n \mid^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}} \left(\sqrt[n]{\mid c_n \mid}\right)^{\frac{2n}{2n-1}}$$

y

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1, \quad \text{y} \quad \frac{2n}{2n-1} \longrightarrow 1,$$

y por tanto se tiene que

$$\limsup \sqrt[2n-1]{n^2 \mid c_n \mid^2} = \limsup \sqrt[n]{\mid c_n \mid}.$$

En consecuencia, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 z^{2n-1}$ converge uniformemente en $[0, r]$, y así los signos de integral y de sumatoria se pueden intercambiar. En conclusión,

$$\lambda(A(r)) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 \int_0^r \varrho^{2n-1} d\varrho = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 \left[\frac{1}{2n} \varrho^{2n} \right]_0^r =$$

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 \frac{1}{2n} r^{2n} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n \mid c_n \mid^2 r^{2n}.$$

■

1.6.6. Ejercicios Resueltos (pp. 69-72)

Ejerc. 41 - 51

Ejercicio Resuelto 41.
Calcula el módulo y el argumento principal de los números

$$1 + e^{i\theta}, \quad 1 - e^{i\theta}, \quad -ae^{i\theta}$$

donde $|\theta| \leq \pi$ *y* $a > 0$.

Solución.

$$|1 + e^{i\theta}| = \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta} =$$

$$\sqrt{2(1 + \cos\theta)} = 2\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}.$$

Para $\theta \neq \pm\pi$ se tiene que $1 + e^{i\theta} \neq 0$ y además está en el semiplano derecho, luego:

$$\arg(1 + e^{i\theta}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

========

$$|1 - e^{i\theta}| = \sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta)^2} = \sqrt{1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta} =$$

$$\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} = 2\left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right|$$

Para $\theta \neq 0$ se tiene que $1 - e^{i\theta} \neq 0$ y además está en el semiplano derecho, luego:

$$\arg(1 - e^{i\theta}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta'}{1 + \cos\theta'}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}\right) = \frac{\theta'}{2}$$

donde

$$\theta' = \begin{cases} \theta - \pi & \text{si } \theta \in]0, \pi] \\ \\ \theta + \pi & \text{si } \theta \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

========

$$|-ae^{i\theta}| = a|e^{i\theta}| = a$$

$$\arg(-ae^{i\theta}) = \arg(-e^{i\theta}) = \begin{cases} \pi - \theta & \text{si} \;\; 0 < \theta \leq \pi \\ \\ \pi + \theta & \text{si} \;\; -\pi \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

■

Ejercicio Resuelto 42.
Calcula $\log z$ *y* $\operatorname{Log} z$ *cuando* z *es uno de los números siguientes*

$$i, \quad e^i, \quad e^{-1+i}, \quad -1+i.$$

Solución.

$$\log i = \log|i| + i\arg(i) = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{Log} i = \{i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} = \{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$$

========

$$\log(e^i) = i \;\; \text{ya que} \quad i \in \mathbb{F} = \{x \in \mathbb{C} : -\pi < Imz \leq \pi\}$$
$$\operatorname{Log}(e^i) = \{i + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} = \{i(1 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$$

========

$$\log(e^{-1+i}) = -1 + i \;\; \text{ya que} \quad -1 + i \in \mathbb{F} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < Imz \leq \pi\}$$
$$\operatorname{Log}(e^{-1+i}) = \{-1 + i + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} = \{-1 + i(1 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$$

========

$$\log(-1+i) = \log|-1+i| + i\arg(-1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{Log}(-1+i) = \{\log\sqrt{2} + i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio Resuelto 43.
Calcula $\log(-1-i) - \log i$ *y* $\log\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$.

Solución.

$$\log(-1-i) - \log i = \log\sqrt{2} + i\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \left(\log 1 + i\frac{\pi}{2}\right) = \log\sqrt{2} - i\frac{5\pi}{4}$$

$$\log\left(\frac{-1-i}{i}\right) = \log\frac{(-1-i)(-i)}{i(-i)} = \log(-1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}.$$

$\blacksquare$

Ejercicio Resuelto 44.
Calcula

$$[(-4)^i], \quad 3^{1-i}, \quad ((-i)^i)^i, \quad (1+i)^{1+i}.$$

Solución.

$$[(-4)^i] = e^{i\operatorname{Log}(-4)} = \{e^{i(\log 4 + i\pi + 2k\pi i)} \ : \ k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$\{e^{i(\log 4 + i(2k+1)\pi)} \ : \ k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{(2k+1)\pi + i\log 4} \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$3^{1-i} = e^{(1-i)\log 3} = e^{\log 3 - i\log 3} = e^{\log 3}e^{-i\log 3} = 3(\cos\log 3 - i\operatorname{sen}\,\log 3)$$

$$((-i)^i)^i = (e^{i\log(-i)})^i = (e^{i(\log 1 - i\,\frac{\pi}{2})})^i = (e^{\frac{\pi}{2}})^i =$$

$$e^{i\log e^{\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i.$$

$$(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\log(1+i)} = e^{(1+i)(\log\sqrt{2}+i\,\frac{\pi}{4})} = e^{\log\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+i\left(\frac{\pi}{4}+\log\sqrt{2}\right)} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\log\sqrt{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\pi}{4}+\log\sqrt{2}\right)\right].$$

De otra forma:

$$(1+i)^{1+i} = (1+i)(1+i)^i = (1+i)e^{i\log(1+i)} = (1+i)e^{i\left(\log\sqrt{2}+i\,\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$(1+i)e^{-\frac{\pi}{4}+i\log\sqrt{2}} = e^{-\frac{\pi}{4}}(1+i)(\cos\log\sqrt{2}+i\,\mathrm{sen}\log\sqrt{2}).$$

■

Ejercicio Resuelto 45.
1) Estudia, para $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $n\in\mathbb{N}$, las igualdades

$$a)\ \log(e^z)=z;\quad b)\ e^{\log z}=z;\quad c)\ \log(\frac{1}{z})=-\log z;$$

$$d)\ \log(\sqrt[n]{z})=\frac{\log z}{n};\quad e)\ \log z^n = n\log z.$$

2) Prueba que el logaritmo principal establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ y $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\,:\,-\pi<\mathrm{Im}\ z<\pi\}$.

Solución.
1)

a)
Si $z=x+iy$, entonces

$$\log(e^z)=\log|e^z|+i\arg(e^z)=\log e^x+i\arg(e^z)=x+i\arg(e^z).$$

Luego la igualdad $\log(e^z)=z$ equivale a $y=\arg(e^z)$. Puesto que $y\in\ \mathrm{Arg}\,(e^z)$, dicha igualdad se da si, y sólo si, $-\pi<y\le\pi$

b)
$$e^{\log z}=e^{\log|z|+i\arg(z)}=e^{\log|z|}e^{i\arg(z)}=|z|(\cos(\arg z)+i\,\mathrm{sen}\,(\arg z))=z.$$

c)

$$\log(\frac{1}{z}) = \log\left|\frac{1}{z}\right| + i\arg(\frac{1}{z}) = \log\frac{1}{|z|} + i\arg(\frac{\overline{z}}{|z|^2}) = -\log|z| + i\arg(\bar{z})$$

y

$$-\log(z) = -\log|z| - i\arg(z).$$

Luego:

$$\log(\frac{1}{z}) = -\log z \Leftrightarrow \arg(\bar{z}) = -arg(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-.$$

d)

$$\log(\sqrt[n]{z}) = \log(|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\,\frac{\arg(z)}{n}}) = \log|z|^{\frac{1}{n}} + i\,\frac{\arg(z)}{n} = \frac{1}{n}\log|z| + i\,\frac{\arg(z)}{n} =$$

$$\frac{1}{n}(\log|z| + i\arg(z)) = \frac{1}{n}\log z.$$

e)

$$\log z^n = \log|z|^n + i\arg(z^n) = n\log|z| + i\arg(z^n)$$

y

$$n\log z = n(\log|z| + i\arg(z)) = n\log|z| + i\,n\ \arg(z).$$

Luego:

$$\log z^n = n\log z \quad\Leftrightarrow\quad \arg(z^n) = n\arg(z).$$

Como quiera que $n\arg(z) \in \operatorname{Arg}(z^n)$, se sigue que lo anterior equivale a

$$-\pi < n\arg(z) \leq \pi \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{n} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{n}.$$

2)

Sabemos que $\log(\Omega) \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ y que $\exp(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-) \subseteq \Omega$. El hecho de que ambas son inversas se sigue del estudio de las igualdades a) y b) del apartado anterior.

■

Ejercicio Resuelto 46.
Con una interpretación adecuada de la suma justifica que

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \qquad \operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w).$$

Solución.
$2\pi\mathbb{Z}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ y en el grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ se tiene que

$$\arg(z) + 2\pi\mathbb{Z} = \operatorname{Arg}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Notemos que en el grupo cociente se verifica que

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

En efecto, ello es consecuencia de que

$$\arg(z) \in \operatorname{Arg}(z), \quad arg(w) \in \operatorname{Arg} \quad \text{y} \quad \arg(z) + \arg(w) \in \operatorname{Arg}(zw).$$

También $2\pi i\mathbb{Z}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$, y en el grupo cociente $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ se tiene que

$$\log z + 2\pi i\mathbb{Z} = \operatorname{Log}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Notemos que en el grupo cociente se verifica que

$$\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w = \operatorname{Log}(zw) \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

En efecto, ello es consecuencia de que

$$\log z \in \operatorname{Log} z, \qquad \log w \in \operatorname{Log} w$$

y

$$\log z + \log w = \log|z| + i\arg(z) + \log|w| + i\arg(w) =$$
$$\log|z| + \log|w| + i(\arg(z) + \arg(w)) =$$
$$\log|zw| + i\,(\arg(z) + \arg(w)) \in \log|zw| + i\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Log}(zw).$$

■

Ejercicio Resuelto 47.
Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades

$$\textbf{a)}\ \mathrm{Log}\,[a^b] = b\,\mathrm{Log}\,(a), \quad \textbf{b)}\ \log[a^b] = b\,\mathrm{Log}\,(a), \quad \textbf{c)}\ \log(a^b) = b\log a.$$

Solución.

a) $\mathrm{Log}\,[a^b] = b\,\mathrm{Log}\,(a)$

Notemos que

$$e^{\mathrm{Log}\,[a^b]} = [a^b] := e^{b\,\mathrm{Log}\,a} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Log}\,[a^b] \subseteq b\,\mathrm{Log}\,a + 2\pi i\mathbb{Z}$$

y

$$e^{b\,\mathrm{Log}\,a} =: [a^b] \quad \Rightarrow \quad b\,\mathrm{Log}\,a \subseteq \mathrm{Log}\,[a^b].$$

Luego, ambos conjuntos producen en el grupo cociente $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ el mismo conjunto.

Sin embargo, ambos conjuntos no son iguales en general. Por ejemplo: Si $a = e^{2\pi}$ y $b = i$, entonces

$$b\,\mathrm{Log}\,a = i\{2\pi + 2k\pi i \,:\, k \in \mathbb{Z}\} = \{2k\pi + 2\pi i \,:\, k \in \mathbb{Z}\},$$

luego

$$[a^b] = e^{b\,\mathrm{Log}\,(a)} = \{e^{2k\pi+2\pi i} \,:\, k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2k\pi}e^{2\pi i} \,:\, k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2k\pi} \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$$

y

$$\mathrm{Log}\,[a^b] = \mathrm{Log}\,\{e^{2k\pi} \,:\, k \in \mathbb{Z}\} = \{2k\pi + 2l\pi i \,:\, k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

b) $\log[a^b] = b\,\mathrm{Log}\,(a)$

Ya que en el grupo cociente $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ se verifica que

$$\log[a^b] + 2\pi i\mathbb{Z} = \mathrm{Log}\,[a^b]$$

se sigue del apartado a) que

$$\log[a^b] + 2\pi i\mathbb{Z} = b\,\mathrm{Log}\,(a).$$

Sin embargo, conjuntístamente se tiene que

$$\log[a^b] \neq b \,\mathrm{Log}\,(a)$$

así, en el ejemplo anterior

$$b \,\mathrm{Log}\, a = \{2k\pi + 2\pi i \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$$

y

$$\log[a^b] = \{2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) $\log(a^b) = b \log a$

Puesto que $e^{b \log a} = a^b$ se sigue que $b \log a \in \mathrm{Log}\,(a^b)$, sin embargo $b \log a$ no tiene por qué ser el logaritmo principal de a^b como muestra el ejemplo anterior:

$$\log(a^b) = \log(e^{i \log e^{2\pi}}) = \log(e^{2\pi i}) = \log 1 = 0$$

y

$$b \log a = 2\pi i.$$

■

Ejercicio Resuelto 48.
Sean $a \in \mathbb{C}$ y $\{z_n\}$ una sucesión de complejos no nulos verificando que $\{|z_n|\} \to +\infty$. Justifica que

$$\left\{ \left(1 + \frac{a}{z_n}\right)^{z_n} \right\} \to e^a; \qquad \left\{ z_n \left(a^{\frac{1}{z_n}} - 1\right) \right\} \to \log a \quad (a \neq 0)$$

Solución.
Sabemos que, dado $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_0^-$, se verifica que

$$\log z = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n} (z-a)^n, \quad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

donde

$$\rho_a = \begin{cases} |a| & \text{si } \mathrm{Re}\, a \geq 0 \\ |\mathrm{Im}\, a| & \text{si } \mathrm{Re}\, a < 0 \end{cases}$$

En particular, tomando $a = 1$, tenemos que

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n, \quad \forall z \in D(1,1).$$

Como consecuencia

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad \forall z \in D(0,1).$$

Luego

$$\frac{a}{z}\log(1+z) = a + a\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{n-1} =$$

$$a + a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1} z^{n}, \quad \forall z \in D(0,1)\backslash\{0\}.$$

Si llamamos f a la función suma de la anterior serie, esto es

$$\begin{array}{rcl} f : D(0,1) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) = a + a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n \end{array}$$

sabemos que f es holomorfa en $D(0,1)$, y en particular continua en 0, luego

$$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = a.$$

Puesto que

$$f(z) = \frac{a}{z}\log(1+z), \quad \forall z \in D(0,1)\backslash\{0\},$$

se sigue que también

$$\lim_{z\to 0} \frac{a}{z}\log(1+z) = a.$$

Si $\{|z_n|\} \to +\infty$, entonces $\{\frac{a}{z_n}\} \to 0$, luego por lo anterior

$$\frac{a}{\frac{a}{z_n}}\log(1+\frac{a}{z_n}) \to a,$$

esto es

$$z_n \log(1+\frac{a}{z_n}) \to a.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta la continuidad de la exponencial,

$$(1+\frac{a}{z_n})^{z_n} = e^{z_n \log(1+\frac{a}{z_n})} \to e^a.$$

- Supongamos ahora que $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Sabemos que $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\frac{1}{z}(a^z - 1) = \frac{1}{z}(e^{z \log a} - 1) = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} z^n = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log a)^{n+1}}{(n+1)!} z^n.$$

Sea g la función suma de la anterior serie de potencias

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & g(z) = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log a)^{n+1}}{(n+1)!} z^n \end{array}$$

Sabemos que g es entera, y por tanto

$$\lim_{z \to 0} g(z) = g(0) = \log a.$$

Puesto que $g(z) = \dfrac{1}{z}(a^z - 1), \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, también

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z}(a^z - 1) = \log a$$

Si $\{|z_n|\} \to +\infty$, entonces $\{\dfrac{1}{z_n}\} \to 0$, luego por lo anterior

$$\frac{1}{\frac{1}{z_n}}(a^{\frac{1}{z_n}} - 1) \to \log a,$$

esto es

$$z_n(a^{\frac{1}{z_n}} - 1) \to \log a.$$

■

Ejercicio Resuelto 49.
Prueba que

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

a) Deduce que para todo $\theta \in]-\pi, \pi[$ *se tiene:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(n\theta) = \log(2\cos\frac{\theta}{2}) \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{\theta}{2}.$$

b) Cambiando z por $-z$, deduce que para todo $\theta \in]0, 2\pi[$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\log(2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}) \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Solución.

Sabemos que

$$\log(z) = \log(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{na^n}(z-a)^n, \qquad \forall z \in D(a, \varrho_a),$$

donde

$$\varrho_a = \begin{cases} \mid a \mid & \text{si} \quad \operatorname{Re}(a) \geq 0 \\ \mid \operatorname{Im}(a) \mid & \text{si} \quad \operatorname{Re}(a) < 0 \end{cases}$$

En particular, tomando $a = 1$, tenemos que

$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n, \qquad \forall z \in D(1,1).$$

En consecuencia,

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

DE OTRA MANERA

Consideremos la función $f(z) = \log(1+z)$. Puesto que el más grande abierto de $\mathbb{C}$ en el que la función logaritmo principal es holomorfa es $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$, por la regla de la cadena, y teniendo en cuenta que la función $z \mapsto 1+z$ es una biyección biholomorfa de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que aplica $]-\infty, -1]$ en $\mathbb{R}_0^-$, se sigue que el más grande abierto de $\mathbb{C}$ en el que f es holomorfa es

$$\Omega = \mathbb{C}\backslash]-\infty, -1].$$

Por el Teorema de Taylor f se puede escribir en $D(0,1)$ (el más grande disco centrado en 0 y contenido en Ω) como la suma de la serie de Taylor de f en el punto 0. Puesto que

$$f'(z) = \frac{1}{1+z},$$

y puesto que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \forall z \in D(0,1),$$

se sigue que

$$f'(z) = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Como $f(0) = \log 1 = 0$ se sigue que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, z^n$$

para todo $z \in D(0,1)$. Así pues, el desarrollo de Taylor de f centrado en 0 es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, z^n$$

para todo $z \in D(0,1)$.

a) Por el apartado anterior la serie converge en $D(0,1)$, y por tanto su radio de convergencia R es mayor o igual a 1. Puesto que

$$\frac{\mid c_{n+1} \mid}{\mid c_n \mid} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$$

se sigue del Criterio del Cociente que $R = 1$.

Como la sucesión de coeficientes de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, z^n$$

es una sucesión de números reales que decrece a cero, por el Teorema de Picard (Ejercicio Propuesto 49), dicha serie converge en todos los puntos de la circunferencia unidad, salvo eventualmente en el punto 1. Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, z^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, (-z)^n,$$

se sigue que nuestra serie converge en la circunferencia unidad excepto eventualmente en los puntos z tales que $-z = 1$, esto es, en el punto $z = -1$. En tal punto nuestra serie es la serie $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que no converge. Resumiendo, la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,z^n$$

converge en $\overline{D}(0,1)\backslash\{-1\}$. Además, por continuidad radial (Proposición 1.45, Pág. 50) podemos concluir que

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,z^n$$

para todo $z\in\overline{D}(0,1)\backslash\{-1\}$.

Dado $\theta\in]-\pi,\pi]$, se tiene que

$$2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}=2\,\frac{1}{2}[e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}]e^{i\frac{\theta}{2}}=1+e^{i\theta}.$$

Puesto que $\frac{\theta}{2}\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, y por tanto $\cos\frac{\theta}{2}\geq 0$, se sigue que

$$\mid 1+e^{i\theta}\mid=\mid 2\cos\frac{\theta}{2}\mid=2\cos\frac{\theta}{2}$$

y

$$\arg(1+e^{i\theta})=\frac{\theta}{2}.$$

(Este cálculo se hizo directamente en el Ejercicio resuelto 41).

Luego

$$\log(1+e^{i\theta})=\log(2\cos\frac{\theta}{2})+i\,\frac{\theta}{2}.$$

Por otra parte, puesto que para todo $\theta\in]-\pi,\pi[$, se tiene que $e^{i\theta}\neq-1$, se sigue de lo anterior que

$$\log(1+e^{i\theta})=f(e^{i\theta})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,(e^{i\theta})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,e^{in\theta}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,(\cos(n\theta))+i\mathrm{sen}(n\theta))=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\cos(n\theta)\ +i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}(n\theta).$$

Igualando las partes real e imaginaria se obtiene el enunciado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(n\theta) = \log(2\cos\frac{\theta}{2}) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{\theta}{2}.$$

b) Cambiando z por $-z$ en el desarrollo de $\log(1+z)$ obtenemos que

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Tomando $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$ para $\theta \in]0, 2\pi[$ se sigue de lo anterior que

$$\log(1-e^{i\theta}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{i\theta})^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\theta} =$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos(n\theta)) + i\operatorname{sen}(n\theta)) =$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} - i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n}.$$

Por otra parte, por el ejercicio resuelto 41,

$$\log(1-e^{i\theta}) = \log(2\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) + i\frac{\theta-\pi}{2},$$

de donde sin mas que comparar las partes real e imaginaria se sigue el enunciado.

■

Ejercicio Resuelto 51. <u>Fórmula de Parseval</u>
Supongamos que la serie $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ *tiene radio de convergencia* $R \in \mathbb{R}^+$. *Sea* f *la función suma de la serie. Prueba que para cada* $r \in]0, R[$ *se verifica la igualdad:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

Solución.
Sea $r \in]0, R[$. Notemos que las funciones sumas parciales n-ésimas de la serie

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \quad (z \in D(0, R))$$

satisfacen

$$|s_n(re^{it})|^2 = \left[\sum_{k=0}^{n} c_k r^k e^{ikt}\right] \left[\sum_{l=0}^{n} \bar{c}_l r^l e^{-ilt}\right] = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_k \bar{c}_l r^{k+l} e^{i(k-l)t},$$

luego

$$\int_0^{2\pi} |s_n(re^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_k \bar{c}_l r^{k+l} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt.$$

Puesto que, para cada $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ por la regla de Barrow

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \frac{1}{in} \left. e^{int}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{in} \left[e^{i2n\pi} - e^0\right] = 0$$

mientras que, para $n = 0$ se tiene

$$\int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi,$$

se sigue de lo anterior que

$$\int_0^{2\pi} |s_n(re^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 r^{2k} 2\pi = 2\pi \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 r^{2k}.$$

Puesto que $\{s_n\} \to f$ uniformemente en $C(0, r)$, se sigue que también $\{|s_n|^2\} \to |f|^2$ uniformemente en $C(0, r)$, luego

$$\int_0^{2\pi} |s_n(re^{it})|^2 dt \to \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$$

y, por tanto

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

■

Capítulo 2.

Teoría de Cauchy elemental.

pp. 75 - 110

2.4.2. Ejercicios Resueltos (pp. 85-86)

Ejerc. 52 - 56

Ejercicio Resuelto 52.
Calcula $\displaystyle\int_{C(a,R)} P(z)\,\overline{dz}$, *donde* $P(z)$ *es una función polinómica.*

Solución.
Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino y f es una función continua en γ^*, se entiende que

$$\int_{\gamma} f(z)\,\overline{dz} := \int_a^b f(\gamma(t))\,\overline{\gamma'(t)}\,dt.$$

Empecemos notando el siguiente hecho:

- *Si* f *es una función continua en* $C(a,R)^*$, *entonces*

$$\int_{C(a,R)} f(z)\,\overline{dz} = -R^2 \int_{C(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$

En efecto, en este caso:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [-\pi,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \gamma(t) = a + Re^{it} \end{array}$$

luego

$$\gamma'(t) = iRe^{it}, \qquad \forall t \in [-\pi,\pi],$$

y por tanto

$$\overline{\gamma'(t)} = -iRe^{-it}, \qquad \forall t \in [-\pi,\pi].$$

Por consiguiente

$$\int_{C(a,R)} f(z)\,\overline{dz} = \int_{-\pi}^{\pi} f(a+Re^{it})\,(-iRe^{-it})\,dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(a+Re^{it})\,\frac{-iR^3e^{it}}{R^2e^{2it}}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(a+Re^{it})\,\frac{-iR^3e^{it}}{((a+Re^{it})-a)^2}\,dt =$$

$$-R^2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+Re^{it})}{((a+Re^{it})-a)^2}\,iRe^{it}\,dt = -R^2\int_{C(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

A continuación, pasamos a resolver el ejercicio:

Escribamos

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (z-a)^k.$$

Teniendo en cuenta el hecho antes comentado,

$$\int_{C(a,R)} P(z)\,\overline{dz} = -R^2 \int_{C(a,R)} \frac{P(z)}{(z-a)^2}\,dz = -R^2 \int_{C(a,R)} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (z-a)^{k-2}\,dz =$$

$$= -R^2 \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_{C(a,R)} (z-a)^{k-2}\,dz = -R^2 \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} (Re^{it})^{k-2} iRe^{it}\,dt =$$

$$-R^2 \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} iR^{k-1} e^{it(k-1)}\,dt = -\sum_{k=0}^{n} R^{k+1} \alpha_k i \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-1)}\,dt =$$

$$-R^2 \alpha_1 2\pi i = -R^2 P'(a) 2\pi i.$$

Veamos más detenidamente este último paso: Dado $m \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}\,dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad m = 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad m \neq 0 \end{cases}$$

En efecto:

Si $m = 0$, es claro.

Si $m \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{im} e^{imt}$ es una primitiva de la función e^{imt}, luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}\,dt = \frac{1}{im}\, e^{imt}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{im}\left[e^{im\pi} - e^{-im\pi}\right] = 0.$$

Este ejercicio también se podría haber hecho de otra manera: Conociendo la fórmula de Cauchy para las derivadas:

$$\int_{C(a,R)} P(z)\,\overline{dz} = -R^2 \int_{C(a,R)} \frac{P(z)}{(z-a)^2}\,dz = -R^2 P'(a) 2\pi i.$$

$\blacksquare$

Ejercicio Resuelto 53.
Sean $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$ y considérese

$$A_R = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z-a| \leq R, \ \alpha \leq \arg(z-a) \leq \beta\}.$$

Supóngase que f es una función continua en A_R tal que

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in A_R}} (z-a)f(z) = L \in \mathbb{C}.$$

Para cada r con $0 < r \leq R$ considérese el arco γ_r definido por

$$\gamma_r(t) = a + re^{it} \ (\alpha \leq t \leq \beta).$$

Probar que

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = i(\beta - \alpha)L.$$

Solución.
Notemos que

$$\int_{\gamma_r} \frac{L}{z-a}\, dz = \int_\alpha^\beta \frac{L}{a + re^{it} - a} ire^{it}\, dt = \int_\alpha^\beta iL\, dt = i(\beta-\alpha)L.$$

Luego:

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \frac{L}{z-a}\, dz = i(\beta-\alpha)L.$$

Veamos que

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \left(f(z) - \frac{L}{z-a} \right) dz = 0.$$

En efecto:

$$0 \leq \left| \int_{\gamma_r} \left(f(z) - \frac{L}{z-a} \right) dz \right| = \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)(z-a) - L}{z-a}\, dz \right| =$$

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{f(a+re^{it})re^{it} - L}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt \right| = \left| \int_\alpha^\beta \big(f(a+re^{it})re^{it} - L \big)\, i\, dt \right| \leq$$

$$\max\{|f(a+re^{it})re^{it}-L| \ : \ \alpha \leq t \leq \beta\} \left| \int_\alpha^\beta dt \right| =$$

$$\max\{|f(z)(z-a)-L| \ : \ z \in \gamma_r\} \, (\beta-\alpha).$$

Ya que, por hipótesis,

$$\lim_{\substack{z\to a \\ z\in A_R}} (z-a)f(z) = L,$$

y en consecuencia

$$\lim_{r\to 0} \max\{|f(z)(z-a)-L| \ : \ z \in \gamma_r\} = 0,$$

se sigue del desarrollo anterior que

$$\lim_{r\to 0} \left| \int_{\gamma_r} \left(f(z) - \frac{L}{z-a} \right) dz \right| = 0,$$

y por tanto

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \left(f(z) - \frac{L}{z-a} \right) dz = 0.$$

Finalmente, escribiendo

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \int_{\gamma_r} \left(f(z) - \frac{L}{z-a} \right) dz + \int_{\gamma_r} \frac{L}{z-a}\, dz,$$

se sigue de lo anterior que

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = i(\beta-\alpha)L.$$

■

Ejercicio Resuelto 54.
Sea f continua en el semiplano superior y tal que

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z) = 0.$$

Prueba que si $\lambda > 0$ y Γ_R es la semicircunferencia de centro 0 y radio R contenida en el semiplano superior, entonces:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz = 0.$$

Solución.
Dado $R > 0$, llamemos

$$M(R) = \max\{|f(z)| \ : \ |z| = R, \ \text{Im } z \geq 0\}.$$

Puesto que

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \text{Im } z\geq 0}} f(z) = 0,$$

se sigue inmediatamente que

$$\lim_{R\to\infty} M(R) = 0.$$

Vamos a intentar acotar la integral del enunciado por una función de R que converja a 0 cuando $R \to +\infty$.

$$0 \leq \left| \int_{\Gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{i\lambda Re^{it}} f(Re^{it}) Rie^{it}\, dt \right| \leq$$

$$\int_0^\pi \left| e^{i\lambda Re^{it}} f(Re^{it}) Rie^{it} \right| \, dt = \int_0^\pi \left| e^{i\lambda Re^{it}} \right| \, \left| f(Re^{it}) \right| \, R\, dt = (*).$$

Puesto que

$$i\lambda Re^{it} = i\lambda R(\cos t + i \operatorname{sen} t) = -\lambda R \operatorname{sen} t + i\lambda R \cos t \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Re(i\lambda Re^{it}) = -\lambda R \operatorname{sen} t \qquad \Rightarrow \qquad \left| e^{i\lambda Re^{it}} \right| = e^{-\lambda R \operatorname{sen} t},$$

se sigue que

$$(*) = \int_0^\pi e^{-\lambda R \operatorname{sen} t} \, |f(Re^{it})| \, R\, dt \leq \int_0^\pi e^{-\lambda R \operatorname{sen} t} \, M(R)\, R\, dt =$$

$$M(R)\, R \int_0^\pi e^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\, dt =$$

$$M(R)\, R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\, dt \right) = (**).$$

Haciendo, en la segunda integral, el cambio de variable $s = t - \frac{\pi}{2}$ obtenemos que

$$(**) = M(R)\,R\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \operatorname{sen} s}\,ds\right) =$$

$$2\,M(R)\,R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\,dt = (***).$$

Puesto que la función seno es cóncava en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, se mantiene por encima de la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(\frac{\pi}{2}, 1)$, esto es, para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ se verifica que $\frac{2}{\pi}\,t \leq \operatorname{sen} t$. De aquí se sigue que

$$-\lambda\,R \operatorname{sen} t \leq -\lambda\,R\,\frac{2}{\pi}\,t,$$

y por el crecimiento de la exponencial

$$e^{-\lambda R \operatorname{sen} t} \leq e^{-\lambda R \frac{2}{\pi} t}.$$

Luego

$$(***) \leq 2\,M(R)\,R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \frac{2}{\pi} t}\,dt = 2\,M(R)\,R\left[-\frac{1}{\lambda R \frac{2}{\pi}} e^{-\lambda R \frac{2}{\pi} t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\,M(R)\,R\,\frac{\pi}{2\lambda R}\,(1 - e^{-\lambda R}) \leq \frac{\pi}{\lambda} M(R).$$

Recapitulando, y teniendo en cuenta que $M(R) \to 0$ cuando $R \to +\infty$, se sigue que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz = 0.$$

■

Ejercicio Resuelto 55.

Sean $a \in \mathbb{C}$ y g una función continua en $\{z \in \mathbb{C} \;:\; r \leq |z-a| \leq R\}$ donde $0 < r < R$. Sea $\{r_n\} \to R$ con $r < r_n < R$. Prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C(a,r_n)} g(z)\,dz = \int_{C(a,R)} g(z)\,dz.$$

Solución.
Teniendo en cuenta la parametrización de una circunferencia y la definición de integral a lo largo de un camino, tenemos que

$$\int_{C(a,r_n)} g(z)\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} g(a + r_n e^{it})\, r_n i\, e^{it}\, dt$$

y

$$\int_{C(a,R)} g(z)\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} g(a + Re^{it})\, R\, i\, e^{it}\, dt.$$

Consideremos las funciones

$$f_n, f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$$

definidas por

$$f_n(t) = g(a + r_n e^{it})\, r_n\, i\, e^{it} \qquad \text{y} \qquad f(t) = g(a + Re^{it})\, R\, i\, e^{it},$$

y veamos que $\{f_n\} \to f$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Como

$$K := \{z \in \mathbb{C} \ : \ r \leq |z - a| \leq R\}$$

es un compacto y la función $g : K \to \mathbb{C}$ es continua, tenemos que:

$$\begin{cases} g \text{ está acotada (propiedad de compacidad):} \\ \qquad\qquad \exists M > 0 \ : \ |g(z)| \leq M, \ \forall z \in K \\ y \\ g \text{ es uniformemente continua (Teorema de Heine).} \end{cases}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por ser g uniformemente continua en K:

$$\exists \delta > 0 \ : \ z,\ w \in K, \text{ con } |z - w| < \delta, \text{ se verifica que } |g(z) - g(w)| < \frac{\varepsilon}{2R}.$$

Como $\{r_n\} \to R$

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \text{ se verifica que } |r_n - R| < \min\{\frac{\varepsilon}{2M}, \delta\}.$$

Notemos que, para cada $n \geq m$ y para cada $t \in [-\pi, \pi]$, se verifica que:

$$|f_n(t) - f(t)| = |g(a + r_n e^{it}) r_n i e^{it} - g(a + Re^{it}) R i e^{it}| =$$

$$|g(a+r_ne^{it})r_n - g(a+Re^{it})R| =$$
$$= |g(a+r_ne^{it})r_n - g(a+r_ne^{it})R + g(a+r_ne^{it})R - g(a+Re^{it})R| \leq$$
$$\leq |g(a+r_ne^{it})|\ |r_n - R| + |g(a+r_ne^{it}) - g(a+Re^{it})|R \leq$$
$$M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2R}R = \varepsilon.$$

Luego $\{f_n\} \to f$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Por consiguiente

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,dt\right\} \to \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,$$

y por tanto

$$\left\{\int_{C(a,r_n)} g(z)\,dz\right\} \to \int_{C(a,R)} g(z)\,dz.$$

■

Ejercicio Resuelto 56.
Integrando la función $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\begin{cases} h(z) = \frac{e^{iz}-1}{z} & si \quad z \neq 0 \\ \\ h(0) = i \end{cases}$$

a lo largo del camino formado por la yuxtaposición del segmento $[-r, r]$ y de la semicircunferencia γ_r de centro 0 y radio r contenida en el semiplano superior, deduce que para todo $r > 0$ se verifica que

$$\left|\int_{-r}^{r} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx - \pi\right| < \frac{\pi}{r}.$$

Solución.
Puesto que

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\ z^n, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

se sigue que

$$e^{iz} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\ z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\ z^{n-1}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

y por tanto

$$\frac{e^{iz}-1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\, z^{n-1}, \qquad \forall z\in\mathbb{C},$$

de donde se sigue que

$$h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\, z^{n-1}, \qquad \forall z\in\mathbb{C}$$

y por tanto h admite primitiva, a saber, la función H dada por:

$$H(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!\; n}\, z^{n}.$$

Por el Teorema de caracterización de existencia de primitivas podemos afirmar que para todo $r>0$ se verifica que

$$\int_{[-r,r]+\gamma_r} h(z)\,dz=0.$$

En consecuencia,

$$0=\int_{[-r,r]} h(z)\,dz+\int_{\gamma_r} h(z)\,dz=\int_{-r}^{r}\frac{e^{it}-1}{t}\,dt+\int_0^r\frac{e^{ire^{it}}-1}{Re^{it}}\,i\,R\,e^{it}\,dt=$$

$$\int_{-r}^{r}\left(\frac{\cos t-1}{t}+i\,\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)dt+i\int_0^{\pi}\left(e^{-r\operatorname{sen} t+i\,r\cos t}-1\right)\,dt=$$

$$=\int_{-r}^{r}\left(\frac{\cos t-1}{t}+i\,\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)dt+$$

$$i\int_0^{\pi}\left(e^{-r\operatorname{sen} t}\left(\cos(r\cos t)+i\operatorname{sen}(r\cos t)\right)-1\right)\,dt=$$

$$=\int_{-r}^{r}\frac{\cos t-1}{t}\,dt+i\int_{-r}^{r}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt+i\int_0^{\pi}(e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)-1)\,dt-$$

$$\int_0^{\pi}e^{-r\operatorname{sen} t}\operatorname{sen}(r\cos t)\,dt.$$

Quedándose con la parte imaginaria tenemos que

$$0=\int_{-r}^{r}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt+\int_0^{\pi}(e^{-r\operatorname{sen} t}\cos(r\cos t)-1)\,dt.$$

Luego:

$$\int_{-r}^{r} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \int_0^{\pi} (1 - e^{-r \operatorname{sen} t} \cos(r \cos t))\, dt =$$

$$\pi - \int_0^{\pi} e^{-r \operatorname{sen} t} \cos(r \cos t)\, dt,$$

y por tanto

$$\left| \int_{-r}^{r} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt - \pi \right| = \left| \int_0^{\pi} e^{-r \operatorname{sen} t} \cos(r \cos t)\, dt \right| \leq$$

$$\int_0^{\pi} e^{-r \operatorname{sen} t} |\cos(r \cos t)|\, dt \leq \int_0^{\pi} e^{-r \operatorname{sen} t}\, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \operatorname{sen} t}\, dt \leq$$

[teniendo en cuenta que, para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, se tiene que $\frac{2}{\pi} t \leq \operatorname{sen} t$ (ver ejercicio 54)]

$$\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \frac{2}{\pi} t}\, dt = -2 \frac{\pi}{2r} e^{-\frac{2r}{\pi} t} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{r} (e^{-r} - 1) = \frac{\pi}{r} (1 - e^{-r}) < \frac{\pi}{r}.$$

■

2.4.6. Ejercicios Resueltos (pp. 97-99)

Ejerc. 57 - 67

Ejercicio Resuelto 57.
Calcula la integral

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\, dz$$

donde $r > 0,\ r \neq 2.$

Solución.
Nótese que las raices del denominador del integrando son $-2i,\ 0,\ 2i.$

-Si $0 < r < 2$, entonces:

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\, dz = \int_{C(0,r)} \frac{\frac{z+1}{z^2+4}}{z}\, dz = \frac{1}{4} 2\pi i = \frac{\pi}{2} i,$$

donde hemos hecho uso de la fórmula de Cauchy para la circunferencia.

-Si $r > 2$ descompongamos la función en fracciones simples:

$$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{A(z^2+4) + B(z^2+2iz) + Cz^2 - 2iz}{z(z-2i)(z+2i)} \qquad \Rightarrow$$

$$z+1 = (A+B+C)z^2 + (2iB - 2iC)z + 4A \qquad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ 2iB - 2iC = 1 \\ 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B+C = -\frac{1}{4} \\ B - C = \frac{1}{2i} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}i \\ C = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}i \end{array} \right\}$$

Luego

$$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{z} + \frac{-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}i}{z-2i} + \frac{-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}i}{z+2i},$$

y por tanto

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\, dz = \frac{1}{4} \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} - (\frac{1}{8} + \frac{1}{4}i) \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z-2i} +$$

$$(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}i) \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z+2i}.$$

Ahora, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\, dz = \frac{1}{4}\, 2\pi i \,-\, (\frac{1}{8}+\frac{1}{4}i)\, 2\pi i \,+\, (-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}i)\, 2\pi i \,=\, 0.$$

■

Ejercicio Resuelto 58.
Calcula

$$\int_{C(2+i,\sqrt{2})} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\operatorname{sen} z}\, dz.$$

Solución.
Nótese que el conjunto de ceros del denominador del integrando es

$$A = \{i, -i\} \cup \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

En consecuencia, la función

$$f(z) = \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\operatorname{sen} z}$$

es holomorfa en $\Omega := \mathbb{C}\backslash A$, y en particular en el disco $D(2{+}i, \sqrt{(2-\pi)^2+1})$. (Nótese que $\sqrt{(2-\pi)^2+1} = \operatorname{dist}(2{+}i, A)$, que es la distancia entre los puntos $2+i$ y π.)

Puesto que $D(2{+}i, \sqrt{(2-\pi)^2+1})$ es un dominio estrellado que contiene a la circunferencia $C(2+i, \sqrt{2})$, por el Teorema de Cauchy para dominios estrellados, f tiene primitiva en $D(2+i, \sqrt{(2-\pi)^2+1})$, y por el Teorema de caracterización de existencia de primitivas

$$\int_{C(2+i,\sqrt{2})} f(z)\, dz = 0.$$

■

Ejercicio Resuelto 59.
Dado $a \in \mathbb{C}\backslash C(0,1)^*$*, calcula*

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\, dz.$$

Solución.
Llamemos
$$f(z) = \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}.$$

-Si $a = 0$, entonces
$$\int_{C(0,1)} f(z)\,dz = \int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z}\,dz = (\text{F. de Cauchy}) = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i.$$

-Supongamos $a \neq 0$. Empecemos calculando las raíces del denominador:
$$-az^2 + (a^2+1)z - a = 0$$
$$z = \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{(a^2+1)^2 - 4a^2}}{-2a} = \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2}}{-2a}$$
$$= \frac{a^2+1 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2 + 1}}{2a} = \frac{a^2+1 \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a} =$$
$$\frac{a^2+1 \pm (a^2-1)}{2a} = \begin{cases} a \\ \frac{1}{a} \end{cases}$$
Luego
$$(a^2+1)z - a(z^2+1) = -a(z-a)(z-\frac{1}{a}),$$
y por tanto
$$f(z) = \frac{\cos z}{-a(z-a)(z-\frac{1}{a})}.$$

-Si $|a| < 1$, entonces:
$$\int_{C(0,1)} f(z)\,dz = \int_{C(0,1)} \frac{\frac{\cos z}{-a(z-\frac{1}{a})}}{z-a}\,dz = (\text{F. de Cauchy})$$
$$2\pi i \frac{\cos a}{-a(a-\frac{1}{a})} = \frac{2\pi i \cos a}{1-a^2}.$$

-Si $|a| > 1$, entonces:
$$\int_{C(0,1)} f(z)\,dz = \int_{C(0,1)} \frac{\frac{\cos z}{-a(z-a)}}{z-\frac{1}{a}}\,dz = (\text{F. de Cauchy})$$

$$2\pi i \frac{\cos\frac{1}{a}}{-a(\frac{1}{a}-a)} = \frac{2\pi i\cos\frac{1}{a}}{a^2-1}.$$

■

Ejercicio Resuelto 60.
Calcula las integrales:

(a) $\displaystyle\int_{C(0,2a)} \frac{e^z}{a^2+z^2}\,dz \qquad (a>0)$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log|a+re^{it}|\,dt \qquad (0<r<|a|)$

Solución.
(a)

$$\int_{C(0,2a)} \frac{e^z}{a^2+z^2}\,dz \qquad (a>0)$$

$$\frac{1}{a^2+z^2} = \frac{1}{(z-ai)(z+ai)} = \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{z-ai} - \frac{1}{z+ai}\right].$$

Luego

$$\int_{C(0,2a)} \frac{e^z}{a^2+z^2}\,dz = \frac{1}{2ai}\left[\int_{C(0,2a)} \frac{e^z}{z-ai}\,dz - \int_{C(0,2a)} \frac{e^z}{z+ai}\,dz\right] =$$

$$=\text{(F. de Cauchy)} = \frac{1}{2ai}\left[2\pi i e^{ai} - 2\pi i e^{-ai}\right] = \frac{2\pi i}{a}\ \frac{e^{ai}-e^{-ai}}{2i} = \frac{2\pi i \operatorname{sen} a}{a}.$$

b)

$$\int_0^{2\pi} \log|a+re^{it}|\,dt \qquad (0<r<|a|)$$

Por la Proposición 1.50 en el disco $D(a,|a|)$ hay logaritmos holomorfos. Sea $f: D(a,|a|)\to\mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \log|z| + i\theta(z)$$

un logaritmo holomorfo.
Dado r con $0<r<|a|$, por la Fórmula de Cauchy, tenemos que

$$f(a)2\pi i = \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\,dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt = i\int_0^{2\pi} (\log|a+re^{it}| + i\theta(a+re^{it}))\,dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} \log|a+re^{it}|\,dt - \int_0^{2\pi} \theta(a+re^{it})\,dt.$$

Igualando las partes imaginarias:

$$\int_0^{2\pi} \log|a+re^{it}|\,dt = \mathrm{Im}\,(f(a)2\pi i) = 2\pi \mathrm{Re}\,(f(a)) = 2\pi\log|a|.$$

■

Ejercicio Resuelto 61.
Sea f una función holomorfa en un disco de centro cero y radio $R > 1$. Calcula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{\overline{f(w)}}{w-z}\,dw \qquad (z\in\mathbb{C}\ :\ |z|\neq 1).$$

Solución.
Para cada $z \in \mathbb{C}\backslash C(0,1)^*$ pongamos

$$I(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{\overline{f(w)}}{w-z}\,dw.$$

Entonces:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{f(e^{it})}}{e^{it}-z}\,ie^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\frac{f(e^{it})}{e^{-it}-\overline{z}}\,(-i)e^{-it}}\,dt =$$

$$-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{\frac{1}{e^{it}}-\overline{z}}\,i\,\frac{1}{e^{it}}\,dt} = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{\frac{1}{e^{it}}-\overline{z}}\,\frac{ie^{it}}{e^{2it}}\,dt} =$$

$$\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{\frac{1}{w}-\overline{z}}\,\frac{dw}{w^2}} = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-\overline{z}w^2}\,dw}.$$

-Si $z = 0$, entonces

$$I(0) = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w}\,dw} = (\text{F. de Cauchy}) = \overline{f(0)}.$$

-Supongamos que $z \neq 0$, y escribamos

$$\frac{1}{w - \overline{z}w^2} = \frac{1}{-\overline{z}w(w - \frac{1}{\overline{z}})} = \frac{1}{w} - \frac{1}{w - \frac{1}{\overline{z}}}.$$

Entonces

$$I(z) = \overline{\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w}\,dw - \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w - \frac{1}{\overline{z}}}\,dz\right]} = \text{(F. de Cauchy)} =$$

$$= \begin{cases} \overline{f(0)} & \text{si} \quad 0 < |z| < 1 \\ \\ \overline{f(0)} - \overline{f(\frac{1}{\overline{z}})} & \text{si} \quad 1 < |z|. \end{cases}$$

■

Ejercicio Resuelto 62. DESARROLLO LIMITADO DE TAYLOR.

Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga a $\overline{D}(a,r)$. Prueba que para todo $z \in D(a,r)$ y todo $n \in \mathbb{N}$ es:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)(z-a)^{n+1}}\,dw.$$

Solución.
Empecemos notando que

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}, \qquad \forall z \in D(0,1),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, para $z \in D(a,R),\ w \in C(a,R),\ y\ n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} =$$

$$= \frac{1}{w-a}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k + \frac{(\frac{z-a}{w-a})^{n+1}}{1 - \frac{z-a}{w-a}}\right] =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}} + \frac{(z-a)^{n+1}}{(w-z)(w-a)^{n+1}}.$$

Por la Fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}\, dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f(w)(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}} + \frac{f(w)(z-a)^{n+1}}{(w-z)(w-a)^{n+1}} \right] dw =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw \right) (z-a)^k +$$

$$\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-z)(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

Finalmente, por la Fórmula de Cauchy para las derivadas

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(z)}{k!}(z-a)^k + \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-z)(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

■

Ejercicio Resuelto 63. SERIE BINOMIAL DE NEWTON.
Sea $a \in \mathbb{C}/\{0\}$. Justifica que

$$(1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!} z^n, \qquad (|z| < 1.)$$

Solución.
Como la aplicación $\log(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ se sigue que la función

$$(1-z)^a = e^{a \log(1-z)}$$

es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq -1\}$, y por tanto el desarrollo de Taylor en 0 converge en el disco $D(0,1)$.
-Vemos por inducción sobre n que $\forall z \in \Omega$ se verifica que

$$\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^a = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+z)^{a-n}.$$

Para $n = 1$,

$$\frac{d}{dz}(1+z)^a = \frac{d}{dz}e^{a\log(1+z)} = a\frac{1}{1+z}e^{a\log(1+z)} = a(1+z)^{-1}e^{a\log(1+z)} =$$

$$ae^{-\log(1+z)}e^{a\log(1+z)} = ae^{(a-1)\log(1+z)} = a(1+z)^{a-1}$$

Supongámoslo cierto par $n \in \mathbb{N}$, y veámoslo para $n+1$:

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}(1+z)^a = \frac{d}{dz}\left[\frac{d^n}{dz^n}(1+z^a)\right] = (\text{Hipótesis de inducción}) =$$

$$= \frac{d}{dz}\left[a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+z)^{a-n}\right] =$$

$$a(a-1)\cdots(a-n+1)\,\frac{d}{dz}(1+z)^{a-n} = (\text{caso n=1 cambiando el exponente}) =$$

$$a(a-1)\cdots(a-n+1)(a-n)(1+z)^{a-n-1}.$$

Finalmente, por el Teorema de Taylor obtenemos que

$$(1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Es usual definir los números combinatorios $\left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right)$ para $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ por

$$\left(\begin{array}{c} a \\ 0 \end{array}\right) = 1 \qquad \text{y} \qquad \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Con esta terminología, el anterior desarrollo se escribe

$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right)z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

■

Ejercicio Resuelto 64.
Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función f, y calcular el radio de convergencia de la serie resultante en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2)$.

(b) $f(z) = \operatorname{arc\,sen} z$.

(c) $f(z) = \log\left(1 + \sqrt{1+z^2}\right)$.

Solución.
(a) $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2)$

Empecemos calculando el dominio de holomorfía de f. Para ello, determinemos los $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 - 3z + 2 \leq 0$:

$$x^2 - y^2 + 2xyi - 3x - 3yi + 2 \leq 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 3x + 2 + i(2xy - 3y) \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ y \\ \\ 2xy - 3y = 0 \Leftrightarrow 2(x - \frac{3}{2})y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ o \\ y = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Sustituyendo en la primera condición
Si $y = 0$, entonces

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2]$$

Si $y = \frac{3}{2}$, entonces

$$\frac{9}{4} - y^2 - \frac{9}{2} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq y^2 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}.$$

En conclusión, f es holomorfa en

$$\mathbb{C} \backslash ([1, 2] \cup \{z \in \mathbb{C} \ : \ \text{Re } z = \frac{3}{2}\}).$$

Por el teorema de Taylor, f admite un desarrollo en serie de potencias centrado en 0 y válido en $D(0, 1)$. Vamos a calcular el desarrollo a partir del desarrollo de su derivada:

$$f'(z) = \frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2} = \frac{-1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{-1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \qquad \forall z \in D(0, 1).$$

Como $f(0) = \log 2$ se sigue que

$$f(z) = \log 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^{n+1} =$$

$$\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) z^n, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Finalmente estudiemos el radio de convergencia de dicha serie

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{2^{n+1}})}{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2^n})} = \frac{n}{n+1} \frac{1+\frac{1}{2^{n+1}}}{1+\frac{1}{2^n}} \to 1,$$

luego $R = 1$.

(b) $f(z) = \operatorname{arc\,sen} z$.

Sabemos que

$$f(z) = \frac{\pi}{2} + i \log \left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$$

es una función holomorfa en

$$\mathbb{C} \backslash (]-\infty, 1] \cup [1, +\infty[).$$

Por el Teorema de Taylor, f admite un desarrollo en serie de potencias centrado en 0 y válido en $D(0,1)$. Vamos a calcularlo a través de su derivada:

$$f'(z) = i \frac{1 + i\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}}{z + i\sqrt{1-z^2}} = \frac{i + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}}{z + i\sqrt{1-z^2}} =$$

$$= \frac{\frac{i\sqrt{1-z^2}+z}{\sqrt{1-z^2}}}{z + i\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Atendiendo a la serie binomial de Newton (ejercicio 63) se tiene que

$$f'(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-z^2)^n =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} z^{2n}, \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Puesto que $f(0) = \operatorname{arc\,sen} 0 = 0$ se sigue que

$$\operatorname{arc\,sen} z = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} (z^{2n+1}) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} (z^{2n+1}), \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Vamos a calcular el radio de convergencia de esta serie. La sucesión parcial $\{|c_{\sigma(n)}|\}$ de la sucesión $\{|c_n|\}$ formada por los coeficientes no nulos viene dada por la aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\sigma(n) = 2n+1$. Puesto que

$$\frac{|c_{\sigma(n+1)}|}{|c_{\sigma(n)}|} = \frac{\frac{1}{2n+3} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n)}{(n+1)!}}{\frac{1}{2n+1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}{(n)!}} = \frac{2n+1}{2n+3} \frac{\frac{1}{2}+n}{n+1} \to 1$$

se sigue, por el Criterio de la raíz, que

$$\sqrt[n]{|c_{\sigma(n)}|} \to 1.$$

Luego

$$\sqrt[\sigma(n)]{|c_{\sigma(n)}|} = \left[|c_{\sigma(n)}|^{\frac{1}{n}} \right]^{\frac{n}{\sigma(n)}} \to 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Por tanto,

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$$

y en consecuencia, $R = 1$.

(c) $f(z) = \log\left(1 + \sqrt{1+z^2}\right)$.

Sabemos que las funciones raíz cuadrada principal y logaritmo principal son holomorfas en $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_0^-$. Además, puesto que la raíz cuadrada principal está valuada en el semiplano derecho se sigue, de la regla de la cadena, que f es holomorfa excepto en los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$1 + z^2 \in \mathbb{R}_0^- \quad \Leftrightarrow \quad z^2 \leq -1 \Leftrightarrow z \in [-i, i].$$

Esto es, f es holomorfa en

$$\mathbb{C} \backslash \{yi \ : \ y \in \mathbb{R}, \ |y| \geq 1\}.$$

Por el Teorema de Taylor, f admite un desarrollo en serie de potencias centrado en 0 y válido en $D(0,1)$. Vamos a calcularlo a través del de su derivada:

$$f'(z) = \frac{\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}}{1+\sqrt{1+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}(1+\sqrt{1+z^2})} = \frac{1}{z}\frac{z^2}{\sqrt{1+z^2}(1+\sqrt{1+z^2})} =$$

$$= \frac{1}{z}\frac{1+z^2-1}{\sqrt{1+z^2}(1+\sqrt{1+z^2})} = \frac{1}{z}\frac{(\sqrt{1+z^2}-1)(\sqrt{1+z^2}+1)}{\sqrt{1+z^2}(1+\sqrt{1+z^2})} =$$

$$\frac{1}{z}\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{z}(1-\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}) = \frac{1}{z}(1-(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}) = (\text{Ejerc. } 63) =$$

$$= \frac{1}{z}(-\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} z^{2n}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} z^{2n-1}, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Como $f(0) = \log 2$ se sigue que

$$f(z) = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} z^{2n}, \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Argumentando de manera similar a como se hizo en el apartado b) se prueba que el radio de convergencia de esta serie es $R = 1$.

■

Ejercicio Resuelto 65.
Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Definamos $f(z) = \log \frac{z-a}{z-b}$ para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{a,b\}$.

- **(a)** *Justifica que f es una función holomorfa en $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{a,b\}$.*
- **(b)** *Justifica que para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que*

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z-b}\,dz.$$

- **(c)** *Si $a = i$, $b = 1$, calcula la serie de Taylor de f en $z = 0$. Calcula el radio de convergencia de dicha serie e indica dónde su suma es igual a f.*

Solución.

(a)

Puesto que log es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$, bastará verificar que

$$z \in]a,b[\quad \Leftrightarrow \quad \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}^-.$$

$\Rightarrow$]

$$z \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad z = (1-t)a + tb \quad (0 < t < 1) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{-ta+tb}{(1-t)a+(t-1)b} \in \mathbb{R}^-.$$

$\Leftarrow$]

$$\frac{z-a}{z-b} = \rho \in \mathbb{R}^- \quad \Rightarrow \quad z-a = \rho(z-b) \Rightarrow (1-\rho)z = a - \rho b \quad \Rightarrow$$
$$z = \frac{1}{1-\rho}a + \frac{-\rho}{1-\rho}b \in]a,b[.$$

(b)

$$f'(z) = \frac{\frac{z-b-(z-a)}{(z-b)^2}}{\frac{z-a}{z-b}} = \frac{\frac{a-b}{(z-b)^2}}{\frac{z-a}{z-b}} = \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{z-a} - \frac{a}{z-b}.$$

Por el Teorema de caracterización de existencia de primitivas

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = 0, \quad \forall\gamma \text{ camino cerrado en } \Omega,$$

y en consecuencia

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{dz}{z-b}, \quad \forall\gamma \text{ camino cerrado en } \Omega.$$

(c)

Supongamos que $a = i$ y $b = 1$. Por lo anterior, f es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash[1, i]$ y

$$f'(z) = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z-1}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash[1, i].$$

Por el Teorema de Taylor, f admite un desarrollo en serie de potencias centrado en 0 y válido en el más grande disco centrado en 0 y contenido en $\mathbb{C}\backslash[1, i]$, esto es en el disco $D(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Calculamos el desarrollo de f a través del de su derivada:

$$f'(z) = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z-1} = \frac{i}{1+iz} + \frac{1}{1-z} = i\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n i^{n+1}\right] z^n, \quad \forall z \in D(0, 1).$$

Como $f(0) = \log i = i\,\frac{\pi}{2}$ se sigue que

$$f(z) = i\,\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n\ i^{n+1}\right] \frac{1}{n+1}\, z^{n+1} =$$

$$i\,\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + (-1)^{n+1} i^n\right] \frac{1}{n}\, z^n =$$

$$i\,\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-i)^n]\, \frac{1}{n}\, z^n, \quad \forall z \in D(0, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Vamos a estudiar el radio de convergencia de esta serie de potencias. Nótese que

$$1-(-i)^n = \left\{ \begin{array}{l} 1+i,\ si\ n = 4k+1 \\ 2,\ si\ n = 4k+2 \\ 1-i,\ si\ n = 4k+3 \\ 0,\ si\ n = 4k \end{array} \right\},\ \text{luego } |c_n| = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{n},\ si\ n = 4k+1 \\ \frac{2}{n},\ si\ n = 4k+2 \\ \frac{\sqrt{2}}{n},\ si\ n = 4k+3 \\ 0,\ si\ n = 4k \end{array} \right\}$$

De aquí se sigue inmediatamente que $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = 1$, y por tanto $R = 1$. Sin embargo, nótese que, por razones de holomorfía, f coincide con la suma de la serie únicamente en $D(0, 1) \cap H$, donde H es el semiplano abierto dado por $H = \{z = x + iy\ :\ x + y < 1\}$. ■

Ejercicio Resuelto 66.
Sea f una función holomorfa en un abierto Ω. Dado $a \in \Omega$, justifica que hay un disco $D(a,\rho) \subseteq \Omega$ tal que

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{2n+1)}(\frac{z+a}{2})}{4^n(2n+1)!}(z-a)^{2n+1}, \qquad \forall z \in D(a,\rho).$$

Solución.
Sea ρ_a el radio del más grande disco abierto centrado en a y contenido en Ω. Dado $z \in D(a,\rho_a)$ notemos que

$$D\left(\frac{a+z}{2}, \rho_a - \frac{1}{2}|z-a|\right) \subseteq D(a,\rho_a).$$

En efecto:

$$\left|w - \frac{a+z}{2}\right| < \rho_a - \frac{1}{2}|z-a| \quad \Rightarrow \quad |w-a| = \left|w - \frac{a+z}{2} + \frac{a+z}{2} - a\right| \leq$$

$$\leq \left|w - \frac{a+z}{2}\right| + \left|\frac{a+z}{2} - a\right| < \rho_a - \frac{1}{2}|z-a| + \frac{1}{2}|z-a| = \rho_a.$$

Notemos también que $z, a \in D\left(\frac{a+z}{2}, \rho_a - \frac{1}{2}|z-a|\right)$ ya que

$$\left|z - \frac{a+z}{2}\right| = \left|\frac{z-a}{2}\right| = \frac{1}{2}|z-a| < \delta_a - \frac{1}{2}|z-a|$$

y

$$\left|a - \frac{a+z}{2}\right| = \left|\frac{a-z}{2}\right| = \frac{1}{2}|z-a| < \delta_a - \frac{1}{2}|z-a|.$$

Como quiera que $D(\frac{a+z}{2}, \rho_a - \frac{1}{2}|z-a|) \subseteq D(a,\rho_a) \subseteq \Omega$, por el Teorema de Taylor tenemos que

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(\frac{a+z}{2})}{n!}(w - \frac{a+z}{2})^n, \qquad \forall w \in D\left(\frac{a+z}{2}, \rho_a - \frac{1}{2}|z-a|\right).$$

Puesto que $z, a \in D\left(\frac{a+z}{2}, \rho_a - \frac{1}{2}|z-a|\right)$ se tiene en particular que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(\frac{a+z}{2})}{n!}(z - \frac{a+z}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(\frac{a+z}{2})}{n!}(\frac{z-a}{2})^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(\frac{a+z}{2})}{2^n n!}(z-a)^n$$

y

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(\frac{a+z}{2})}{n!}(a - \frac{a+z}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(\frac{a+z}{2})}{n!}(\frac{a-z}{2})^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(\frac{a+z}{2})}{n!}(-\frac{z-a}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{f^{n)}(\frac{a+z}{2})}{2^n n!}(z-a)^n.$$

Restando ambos desarrollos (los términos pares se van, y los términos impares se doblan) se obtiene que

$$f(z)-f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{f^{2n+1)}(\frac{a+z}{2})}{2^{2n+1}(2n+1)!}(z-a)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{2n+1)}(\frac{a+z}{2})}{2^{2n}(2n+1)!}(z-a)^{2n+1}.$$

■

Ejercicio Resuelto 67. Integrales tipo Cauchy.
Sea γ un camino en $\mathbb{C}$ y $\varphi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Prueba que la función $f : \mathbb{C}\backslash\gamma^* \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\, dw, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$$

es analítica y sus derivadas vienen dadas por

$$f^{n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw, \ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución.
(ver 3.25)

Dado $a \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$, sea $\rho = \operatorname{dist}(a, \gamma^*) > 0$. Para $z \in D(a,\rho)$ y $w \in \gamma^*$ tenemos que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}.$$

Puesto que

$$|z-a| < |w-a| \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1,$$

se sigue de lo anterior que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n,$$

y en consecuencia:

$$\frac{\varphi(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\ (z-a)^n.$$

Si $k = \max\{|\varphi(z)|\ :\ w \in \gamma^*\}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\left|\frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n\right| \leq \frac{k}{\rho^{n+1}}|z-a|^n = \frac{k}{\rho}\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n.$$

Puesto que la serie numérica

$$\sum_{n\geq 0}\frac{k}{\rho}\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n = \frac{k}{\rho}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n$$

es convergente (por ser una serie geométrica de razón $\frac{|z-a|}{\rho} < 1$), se sigue del criterio de la mayorante de Weierstrass que

$$\frac{\varphi(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n, \forall z \in D(a,\rho),\ \text{uniformemente en } w \in \gamma^*.$$

En consecuencia

$$f(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw = \int_\gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n\right)dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\right)(z-a)^n, \quad \forall z \in D(a,\rho).$$

Por consiguiente, variando $a \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$, obtenemos que f es analítica. Finalmente, comparando el desarrollo en serie obtenido con el desarrollo de Taylor para f en a tenemos que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{f^{n)}(a)}{n!} = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw.$$

■

2.5.1. Ejercicios Resueltos (pp. 107-108)

Ejerc. 68 - 75

Ejercicio Resuelto 68. (Teorema extendido de Liouville)
Sea f una función entera tal que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^{\alpha}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad con \quad |z| \geq M,$$

donde A, B, α, y M son constantes no negativas. Prueba que f es una función polinómica de grado menor o igual a $E[\alpha]$.

Solución.
Para cada natural n, por las desigualdades de Cauchy

$$\frac{|f^{n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(R)}{R^n}, \qquad \forall R > 0,$$

donde

$$M(R) = \max\{|f(z)| \ : \ z \in C(0, R)\}.$$

De la condición en el enunciado para f se sigue que, para todo $R \geq M$ se verifica que

$$M(R) \leq A + BR^{\alpha},$$

y por tanto, para todo natural n,

$$\frac{|f^{n)}(0)|}{n!} \leq \frac{A + BR^{\alpha}}{R^n}, \qquad \forall R > M.$$

Puesto que, para $n > \alpha$, se verifica que

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{A + BR^{\alpha}}{R^n} = 0,$$

se sigue que

$$f^{n)}(0) = 0, \qquad \forall n > \alpha.$$

Por tanto, por el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en 0, podemos asegurar que f es un polinomio de grado menor o igual a $E[\alpha]$.

■

Ejercicio Resuelto 69.
Sea f una función entera no constante. Dado $w \in \mathbb{C}$, justifíquese que se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

a) La ecuación $f(z) = w$ tiene solución.

b) Existe una sucesión $\{z_n\} \to \infty$ tal que $\{f(z_n)\} \to w$.

Solución.
Supongamos que no se verifica a), esto es $w \notin f(\mathbb{C})$. Como f es una función entera no constante sabemos que $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$, por lo que podemos tomar una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{C}$ tal que $\{f(z_n)\} \to w$. Si $\{z_n\}$ estuviese acotada, esto es

$$\exists M > 0 \quad : \qquad | z_n | \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

como $\overline{D}(0, M)$ es un compacto, existiría una parcial $\{z_{\sigma(n)}\}$ convergente. Si $\{z_{\sigma(n)}\} \to z_0$, entonces, por continuidad, $\{f(z_{\sigma(n)})\} \to f(z_0)$, y por tanto $w = f(z_0)$ ¡en contra de lo supuesto! Luego $\{z_n\}$ no está acotada, y por tanto tiene una parcial $\{z_{\sigma(n)}\} \to \infty$, la cual nos permite afirmar b).

■

Ejercicio Resuelto 70.
¿Puede existir una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ tal que

$$|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*? \tag{1}$$

Solución.
Si existiese una tal función f, entonces por (1) f no se anula en $\mathbb{C}^*$, luego $\frac{1}{f}$ es también holomorfa en $\mathbb{C}^*$. Además, de (1) se sigue que

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \sqrt{|z|}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*, \tag{2}$$

y por tanto

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{f(z)} = 0. \tag{3}$$

Por el Teorema de Riemann, $\frac{1}{f}$ puede verse como una función entera (que se anula en 0). De (2), por el Teorema extendido de Liouville (ejercicio 68) se sigue que $\frac{1}{f}$ es constante. Por (3),

$$\frac{1}{f(z)} = 0, \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

lo que es imposible.

■

Ejercicio Resuelto 71.
Calcula
$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z-\frac{\pi}{4})^2(z^2+9)}\, dz.$$

Solución.
Consideremos la función
$$f(z) := \frac{\operatorname{sen}(2z)}{z^2+9}$$
Puesto que
$$z^2+9=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z=\pm 3i,$$
se sigue que f es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-3i,3i\}$. Como quiera que
$$\frac{\pi}{4} \in D(0,1) \subseteq \overline{D}(0,1) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{-3i,3i\}$$
por la fórmula de Cauchy para la derivada primera
$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z-\frac{\pi}{4})^2(z^2+9)}\, dz = \int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(\frac{\pi}{4}).$$
Puesto que
$$f'(z) = \frac{2(z^2+9)\cos(2z) - 2z\operatorname{sen}(2z)}{(z^2+9)^2},$$
y en particular
$$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{-\frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi^2}{4^2}+9)^2},$$
se sigue que
$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z-\frac{\pi}{4})^2(z^2+9)}\, dz = -\frac{\pi^2}{(\frac{\pi^2}{4^2}+9)^2} i.$$

■

Ejercicio Resuelto 72.
Calcula
$$\int_{C(0,r)} \frac{dw}{(w-a)(w-b)^m},$$
donde $m \in \mathbb{N}$ *y* $\mid b \mid < r < \mid a \mid$.

Solución.
La función $f(z) = \frac{1}{z-a}$ es holomorfa en el abierto $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{a\}$. Como quiera que $b \in D(0,r) \subseteq \overline{D}(0,r) \subseteq \Omega$ se sigue de la fórmula de Cauchy para las derivadas que

$$\int_{C(0,R)} \frac{dw}{(w-a)(w-b)^m} = \int_{C(0,R)} \frac{f(w)\,dw}{(w-b)^m} = \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{m-1)}(b).$$

Nótese, por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que

$$f^{n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(z-a)^{n+1}}.$$

Luego

$$\int_{C(0,R)} \frac{dw}{(w-a)(w-b)^m} = \frac{2\pi i}{(m-1)!} \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(b-a)^m} = \frac{(-1)^{m-1} 2\pi i}{(b-a)^m}.$$

■

Ejercicio Resuelto 74.
Prueba que la serie
$$\sum_{n\geq 1} e^{-n} \operatorname{sen}(nz)$$
converge uniformemente en subconjuntos compactos de

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\operatorname{Im} z| < 1\}$$

y calcula su suma.

Solución.

$$\sum_{n\geq 1} e^{-n} \operatorname{sen}(nz) = \sum_{n\geq 1} e^{-n} \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_{n\geq 1} \left(\left(\frac{e^{iz}}{e}\right)^n - \left(\frac{e^{-iz}}{e}\right)^n \right).$$

Puesto que la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 0} z^n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 1,$$

se sigue que

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{iz}}{e}\right)^n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{e^{iz}}{e}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\mathrm{Im}\ z} < e \Leftrightarrow -\mathrm{Im}\ z < 1,$$

y

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{-iz}}{e}\right)^n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{e^{-iz}}{e}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\mathrm{Im}\ z} < e \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ z < 1,$$

y por tanto

$$\sum_{n\geq 1} e^{-n} \operatorname{sen}(nz) \text{ converge}, \qquad \forall z \in \Omega.$$

Además, en tal caso, teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{para todo } \ z \ : \ |z| < 1,$$

se sigue que para todo $z \in \Omega$

$$\sum_{n=1} e^{-n} \operatorname{sen}(nz) = \frac{1}{2i} \left[\sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{iz}}{e}\right)^n - \sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{-iz}}{e}\right)^n \right] =$$

$$\frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{iz}}{e}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-iz}}{e}\right)^n \right] = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1-\frac{e^{iz}}{e}} - \frac{1}{1-\frac{e^{-iz}}{e}} \right] =$$

$$\frac{e}{2i} \left[\frac{1}{e-e^{iz}} - \frac{1}{e-e^{-iz}} \right] = \frac{e}{2i} \frac{e-e^{-iz}-(e-e^{iz})}{(e-e^{iz})(e-e^{-iz})} =$$

$$\frac{e}{2i} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{(e-e^{iz})(e-e^{-iz})} = \frac{e \operatorname{sen} z}{e^2 - e(e^{iz}+e^{-iz})+1} = \frac{e \operatorname{sen} z}{1+e^2-2e\cos z}.$$

-Para verificar que hay convergencia uniforme en los compacto de Ω nos bastará con verificar que hay convergencia uniforme en las franjas

$$F_\rho = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\mathrm{Im}\ z| \leq \rho\}$$

para $0<\rho<1$. En efecto, para cualesquiera $z \in F_\rho$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|e^{-n}\operatorname{sen}(nz)| = \left| e^{-n}\frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2i}\right| = \frac{1}{2}\frac{|e^{inz}-e^{-inz}|}{e^n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{|e^{inz}|+|e^{-inz}|}{e^n} = \frac{1}{2}\frac{e^{-n\mathrm{Im}\ z}+e^{n\mathrm{Im}\ z}}{e^n} \leq$$

(la exponencial real es creciente)

$$\leq \frac{e^{n|\mathrm{Im}\ z|}}{e^n} \leq \frac{e^{n\rho}}{e^n} = \left(\frac{e^\rho}{e}\right)^n = \left(e^{\rho-1}\right)^n.$$

Puesto que la serie geométrica de razón $e^{\rho-1}<1$ es convergente se sigue del Criterio de convergencia de Weierstrass que la serie $\sum e^{-n}\operatorname{sen}(nz)$ converge uniformemente en F_ρ.

■

Ejercicio Resuelto 75.
Prueba que la serie

$$1+\sum_{n\geq 0}\frac{z^2(z^2+1)(z^2+2^2)\cdots(z^2+n^2)}{[(n+1)!]^2}$$

es convergente para todo z y su suma es una función entera.

Solución.
Por el Teorema de convergencia de Weierstrass nos bastará con verificar que la serie converge uniformemente en todo compacto de $\mathbb{C}$. Para ello nos bastará verificar que la serie converge uniformemente en todo disco cerrado $\overline{D}(0,R)$ con $R>0$.

Fijado $R>0$, veamos la convergencia uniforme de la serie en $\overline{D}(0,R)$ utilizando el Criterio de convergencia de Weierstrass. Notemos que si $|z|\leq R$, entonces:

$$|f_n(z)| = \left|\frac{z^2(z^2+1)(z^2+2^2)\cdots(z^2+n^2)}{[(n+1)!]^2}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{R^2(R^2+1)(R^2+2^2)\cdots(R^2+n^2)}{[(n+1)!]^2}\right| =$$

$$\frac{R^2}{(n+1)^2}\,\frac{R^2+1}{1}\,\frac{R^2+2^2}{2^2}\cdots\frac{R^2+n^2}{n^2}=$$
$$\frac{R^2}{(n+1)^2}\,\left(1+R^2\right)\left(1+\frac{R^2}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{R^2}{n^2}\right).$$

Notemos que la sucesión

$$a_n:=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{R^2}{k^2}\right)$$

es convergente.
En efecto, puesto que

$$\log a_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{R^2}{k^2}\right)$$

y

$$\lim\frac{\log\left(1+\frac{R^2}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim n^2\log\left(1+\frac{R^2}{n^2}\right)=\lim\log\left(1+\frac{R^2}{n^2}\right)^{n^2}=$$

$$=\log\lim\left(1+\frac{R^2}{n^2}\right)^{n^2}=\log e^{\lim n^2\,\frac{R^2}{n^2}}=\log e^{R^2}=R^2>0,$$

se sigue del Criterio de comparación por paso al límite que las series

$$\sum\log(1+\frac{R^2}{n^2})\qquad\text{y}\qquad\sum\frac{1}{n^2}$$

tienen mismo carácter, y por tanto $\sum\log\left(1+\frac{R^2}{n^2}\right)$ es convergente, esto es, la sucesión $\log a_n$ es convergente, y en consecuencia la sucesión $a_n=e^{\log a_n}$ también es convergente. Llamemos $L=\lim a_n$. Puesto que claramente la sucesión $\{a_n\}$ es creciente, se tiene que $a_n\le L$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Luego $\forall z$ con $|z|\le R$ se verifica que

$$|f_n(z)|\le L\,\frac{R^2}{(n+1)^2},\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Puesto que la serie numérica

$$\sum_{n\ge0}L\,\frac{R^2}{(n+1)^2}=LR^2\sum_{n\ge0}\frac{1}{(n+1)^2}$$

es convergente, se sigue del Criterio de convergencia de Weierstrass que la serie $\sum_{n\geq 0} f_n(z)$ converge uniformemente en $\overline{D}(0,R)$. Por tanto también $1+\sum_{n\geq 0} f_n(z)$ converge uniformemente en $\overline{D}(0,R)$.

$\blacksquare$

Capítulo 3.

Propiedades locales de las funciones holomorfas.

pp. 111 - 140

3.2.1. Ejercicios Resueltos (p. 116)

Ejerc. 76 - 78

Ejercicio Resuelto 76.
Sea f una función entera verificando que

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

Prueba que f es una función polinómica.

Solución.

Sea f una función entera verificando

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty. \tag{4}$$

Veamos en primer lugar que el conjunto de ceros de f es no vacío y finito.

Si f no se anula en ningún punto, entonces la función $\frac{1}{f}$ es una función entera (por cierto, valuada en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$) verificando que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Luego la función $\frac{1}{f}$ está acotada, y por el Teorema de Liouville es constante. Así, existe $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que $\frac{1}{f(z)} = \alpha$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y por tanto $f(z) = \frac{1}{\alpha}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Lo que contradice la condición (4). Así pues, el conjunto $Z(f)$ de ceros de f es no vacío.

Además, de (4) se sigue que

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \forall z \text{ con } \mid z \mid > M \text{ se verifica que } \mid f(z) \mid > 1. \tag{5}$$

En consecuencia,

$$Z(f) \subseteq \overline{D}(0, M).$$

Como $\overline{D}(0, M)$ es un compacto, si $Z(f)$ fuese infinito, tendría que tener puntos de acumulación, lo que llevaría, por el Principio de Identidad, a que f es idénticamente nula, contradiciendo la condición (5). Así pues $Z(f)$ es finito.

Supongamos que

$$Z(f) = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$$

y que cada a_i $(1 \leq i \leq k)$ tiene multiplicidad m_i. Como consecuencia de la caracterización de los ceros podemos escribir

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1}(z - a_2)^{m_2} \cdots (z - a_k)^{m_k} g(z)$$

donde g es una función entera que no se anula en ningún punto. En consecuencia, la función dada por

$$\varphi(z) := \frac{1}{g(z)} = \frac{(z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_k)^{m_k}}{f(z)}$$

es una función entera. Como quiera que por (5) se tiene que

$$\forall z \text{ con } \mid z \mid > M \text{ se verifica que } \frac{1}{\mid f(z) \mid} < 1$$

se sigue que

$$\mid \varphi(z) \mid = \mid \frac{1}{g(z)} \mid < \mid z-a_1 \mid^{m_1} \cdots \mid z-a_k \mid^{m_k} \leq$$

$$(\mid z \mid + \mid a_1 \mid)^{m_1} \cdots (\mid z \mid + \mid a_k \mid)^{m_k} \leq$$

$$(\mid z \mid + M)^{m_1} \cdots (\mid z \mid + M)^{m_k} = (\mid z \mid + M)^{m},$$

donde $m = m_1 + \cdots + m_k$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n > m$ y para todo $R > M$, por las desigualdades de Cauchy, se verifica que

$$0 \leq \frac{\mid \varphi^{n)}(0) \mid}{n!} \leq \frac{\max\{\mid \varphi(z) \mid : \mid z \mid = R\}}{R^n} \leq \frac{(R+M)^m}{R^n}.$$

Como quiera que

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{(R+M)^m}{R^n} = 0$$

se sigue

$$\varphi^{n)}(0) = 0, \quad \forall n > m.$$

De aquí, teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Taylor de φ centrado en 0, podemos concluir que φ es una función polinómica. Ahora bien, como φ no se anula en ningún punto, necesariamente φ es constante. Por tanto también g es constante, y en conclusión

$$f(z) = K(z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_k)^{m_k}$$

para conveniente $K \in \mathbb{C}$.

NOTAS:

(1) El argumento final se podría haber sustituido por una aplicación directa del ejercicio resuelto 68.

(2) El enunciado de este ejercicio podrá obtenerse más adelante a partir de la caracterización de polo en el punto del infinito (véanse las proposiciones 4.33.1 y 4.34 en las páginas 175-176).

■

Ejercicio Resuelto 77.
Sean f y g dos funciones enteras no constantes verificando que

$$| f(z) |\leq| g(z) | \qquad \textit{para todo} \;\; z \in \mathbb{C}.$$

¿Que se puede afirmar sobre f y g.

Solución.

Como g se supone no constante, tenemos que g no es idénticamente nula. Por tanto $Z(g)$ es un cerrado propio de $\mathbb{C}$, y en consecuencia $\mathbb{C}\backslash Z(g)$ es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. De las condiciones de f y g se sigue que $\frac{f}{g}$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}\backslash Z(g)$ verificando la condición

$$| \frac{f(z)}{g(z)} |\leq 1 \qquad \text{para todo} \;\; z \in \mathbb{C}\backslash Z(g). \qquad (*)$$

Por el Principio de los ceros aislados y por el Teorema de Riemann podemos afirmar que $\frac{f}{g}$ admite una extensión holomorfa a $\mathbb{C}$, esto es, $\frac{f}{g}$ puede verse como una función entera. Un argumento de continuidad, nos permite deducir de (*) que tal función entera está acotada por 1, luego, por el Teorema de Liouville, es constante. Así pues, existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $f = kg$ en $\mathbb{C}\backslash Z(g)$, y por continuidad en $\mathbb{C}$.

■

Ejercicio Resuelto 78.
Sea f una función entera no constante verificando que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Prueba que f es de la forma

$$f(z) = \alpha z^n$$

donde n es un número natural y $|\alpha| = 1$.

Solución.
Consideremos las funciones holomorfas $f^*: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$$

(ver el ejercicio resuelto 27) y $g: \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$g(z) := f^*(\frac{1}{z}).$$

De la condición que verifica f se sigue que para todo $z \in C(0,1)$ se verifica que

$$1 = |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = f(z)f^*(\overline{z}) = (z\overline{z} = 1) = f(z)f^*(\frac{1}{z}) = f(z)g(z).$$

Por el principio de identidad tenemos que

$$1 = f(z)g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

-Notemos que si $f(0) \neq 0$, entonces f es constante.
En efecto, si $f(0) = \alpha \neq 0$, entonces

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)g(z)}{f(z)} = \frac{1}{\alpha},$$

luego

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = \lim_{z\to 0} \overline{\overline{f(\frac{1}{\overline{z}})}} = \lim_{z\to 0} \overline{g(\overline{z})} = \overline{\alpha} \neq 0,$$

y por tanto, por el Teorema de Liouville, f es constante.
Puesto por hipótesis f no es constante, se sigue que $f(0) = 0$. Supongamos que n es el orden de f en 0. Por la caracterización del orden de un cero

$$f(z) = h(z)z^n \text{ para } h \text{ función entera con } h(0) \neq 0.$$

Nótese que las condiciones en el enunciado para que f se transfieren a h. Por lo antes probado, podemos afirmar que h es constante (obligadamente de módulo 1). En conclusión:

$$f(z) = \alpha z^n \text{ para } |\alpha| = 1.$$

■

3.5.1. Ejercicios Resueltos (pp. 136-139)

Ejerc. 79 - 85

Ejercicio Resuelto 79.
Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y supóngase que para cada $z \in \mathbb{C}$ hay alguna derivada de f que se anula en z. Prueba que f es una función polinómica.

Solución.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $Z(f^{n)})$ al conjunto de todos los ceros de la función holomorfa $f^{n)}$. Por hipótesis

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z(f^{n)}).$$

Puesto que $\mathbb{C}$ es no numerable, habrá de existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $Z(f^{m)})$ sea no numerable. Por el Corolario 3.3, $f^{m)} = 0$, y por tanto también $f^{m+n)} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Taylor (en el punto 0) se sigue que f es un polinomio de grado menor o igual que $m - 1$.

■

Ejercicio Resuelto 80.
Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante. Se define

$$M(r) = \max\{|f(z)| \ : \ |z| = r\}, \ (0 < r < 1)$$

a) *Prueba que la función M es estrictamente creciente.*
b) *Supongamos que hay un número natural n tal que para todo $r \in]0,1[$ es $M(r) = r^n$, deduce que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$.*

Solución.
a) Por el Principio del módulo máximo

$$M(r) = \max\{|f(z)| \ : \ z \in \overline{D}(0,r)\},$$

luego la función M es creciente. Además es estrictamente creciente, ya que en otro caso existirían $s, r \in]0,1[$ tales que $s < r$ y $M(s) = M(r)$, y entonces f alcanzaría un máximo relativo en un punto del disco $D(0,1)$ lo que implicaría, por el Principio del módulo máximo, que f sería constante.

b) Supongamos que

$$\exists n \in \mathbb{N} \ : \ M(r) = r^n, \quad \forall r \in]0,1[.$$

Puesto que, por el Principio del módulo máximo,

$$|f(0)| < M(r),\ \forall r \in]0,1[,$$

se sigue que $f(0) = 0$.
Por la caracterización de los ceros

$$\exists m \in \mathbb{N} \text{ y } \exists g \in \mathcal{H}(D(0,1)) \text{ con } g(0) \neq 0 \text{ tales que } f(z) = z^m g(z).$$

Se tendrá entonces que

$$M_f(r) = r^m M_g(r),\ \forall r \in]0,1[,$$

y por tanto

$$r^n = r^m M_g(r),\ \forall r \in]0,1.[$$

-Si $n > m$, entonces

$$M_g(r) = r^{n-m},\ \forall r \in]0,1,[$$

de donde, razonando como antes, se deduce que $g(0) = 0$, lo cual es contradictorio con el nacimiento de g.

-Si $n < m$, entonces

$$M_g(r)^{n-m},\ \forall r \in]0,1[,$$

y por tanto M_g es decreciente, lo que contradice el apartado a) para la función g.

Luego $n = m$, y por tanto

$$M_g(r) = 1,\ \forall r \in]0,1[,$$

lo que implica por el apartado a) que g es constante (obligadamente de módulo 1).

En conclusión:

$$f(z) = \alpha z^n$$

para conveniente $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$.

■

Ejercicio Resuelto 81.
Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$ y $u \in \mathcal{A}(\Omega_2)$. Prueba que la composición $u \circ f$ es armónica en Ω_1.

Solución.
Dado $a \in \Omega_1$, y fijado un disco $D(f(a), R) \subseteq \Omega_2$, por el Corolario 3.19, existe una función holomorfa $g : D(f(a), R) \to \mathbb{C}$ tal que $u = \text{Re } g$ en $D(f(a), R)$. Como f es continua en a

$$\exists \delta > 0 \ : \ f(D(a, \delta)) \subseteq D(f(a), R).$$

Así, $u \circ f : D(a, \delta) \to \mathbb{R}$ es tal que

$$u \circ f = (\text{Re } g) \circ f = \text{Re } (g \circ f) \text{ en } D(a, \delta).$$

Luego $u \circ f$ es armónica en $D(a, \delta)$ (Proposición 3.15.)
Puesto que el concepto de armonicidad es un concepto local se sigue que $u \circ f$ es armónica.

■

Ejercicio Resuelto 82.
Sea u una función armónica en todo el plano y supongamos que existen números reales positivos a, b tales

$$u(z) \leq a\,|\log|z|\,| + b \qquad \textit{para todo} \ \ z \in \mathbb{C}^*.$$

¿Quer puede afirmarse de u?.

Solución.
Puesto que $\mathbb{C}$ es un dominio estrellado, por el Corolario 3.18, existe una función entera f tal que $u = \text{Re}\, f$. Consideremos la función entera g definida por

$$g(z) = e^{f(z)}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Es claro que

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\text{Re}\, f(z)} = e^{u(z)} \leq e^{a\,|\log|z|\,|+b} = e^b e^{a\,|\log|z|\,|}.$$

Puesto que para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq 1$ se tiene que $\log|z| \ \geq 0$, se sigue que

$$|g(z)| \leq e^b e^{a \log|z|} = e^b\,|z|^a.$$

Por el ejercicio resuelto 68, podemos afirmar que g es una función polinómica. Ahora bien, puesto que g resulta de componer una función con la exponencial, tenemos que g no se anula nunca. Luego g es constante. Sea $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = w_0, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto

$$f(z) \in \operatorname{Log} w_0, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Puesto que $\operatorname{Log} w_0$ es un subconjunto cerrado propio de $\mathbb{C}$, por el Teorema 2.23, podemos afirmar que f es constante. Luego u es constante. ■

Ejercicio Resuelto 85.
Sea f una función entera no constante y supongamos que hay un número complejo $\alpha \neq 0, 1$ tal que

$$f(z) = f(\alpha z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) *Prueba que $f(z) = f(\alpha^n z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $z \in \mathbb{C}$, y deduce que necesariamente $|\alpha| = 1$*
b) *Justifica que el conjunto $\{\alpha^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es finito, y por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^m = 1$.*
c) *Sea m el menor número natural tal que $\alpha^m = 1$. Justifica que hay una función entera g tal que*

$$f(z) = g(z^m), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Solución.
a) Veamos que

$$f(z) = f(\alpha^n z), \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{C}.\ (*)$$

Para $n = 0$ es claro. Para $n = 1$ es la hipótesis. Razonando por inducción, supongamos que (*) es válida para el número natural n y demostrémosla para $n + 1$.

$$f(\alpha^{n+1} z) = f(\alpha^n \alpha z) = (\text{hipótesis de inducción}) = f(\alpha z) =$$

$$(\text{caso n=1}) = f(z).$$

Luego (*) es válida para $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Finalmente, dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$f(\alpha^{-n}z) = ((*) \text{ para } n \in \mathbb{N}) = f(\alpha^n \alpha^{-n} z) = f(z).$$

Luego (*) es válida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

-Si $|\alpha| < 1$, entonces el conjunto infinito $\{\alpha^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ se acumula en 0 y, ya que, por (*), f coincide en dicho conjunto con la función constantemente $f(1)$, se sigue, por el principio de identidad, que f es constante, lo que contradice la hipótesis.

-Si $|\alpha| > 1$, entonces el conjunto infinito $\{\alpha^{-n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ se acumula en 0 y, ya que, por (*), f coincide en dicho conjunto con la función constantemente $f(1)$, se sigue, por el principio de identidad, que f es constante, lo que contradice la hipótesis.

-Luego $|\alpha| = 1$.

b) Como $|\alpha| = 1$ se tiene que $\{\alpha^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\} \subseteq C(0,1)$. Como $C(0,1)$ es un compacto, si $\{\alpha^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ fuese infinito, tendría un punto de acumulación. Puesto que en dicho conjunto f toma constantemente el valor $f(1)$, por el principio de identidad, f sería constante, lo que es contrario a la hipótesis. Luego, el conjunto $\{\alpha^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es finito.

c) Sea

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ \alpha^n = 1\}$$

Nótese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, derivando n veces la condición (*) se obtiene que

$$f^{n)}(z) = \alpha^n f^{n)}(\alpha z), \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

En particular, para $z = 0$, se obtiene que

$$f^{n)}(0) = \alpha^n f^{n)}(0),$$

esto es

$$(1 - \alpha^n) f^{n)}(0) = 0,$$

de donde se deduce que, para n no múltiplo entero de m, necesariamente $f^{n)} = 0$.
Así, el desarrollo en serie de Taylor de f en 0 tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} z^{mz}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Si consideramos la función entera g dada por la suma de la serie

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} z^n$$

se deduce que

$$f(z) = g(z^m), \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

■

Capítulo 4.

Forma general del Teorema de Cauchy.

pp. 141 - 244

4.3.1. Ejercicios Resueltos (pp. 156-160)

Ejerc. 86 - 91

4.5.3. Ejercicios Resueltos (pp. 176-183)

Ejerc. 92 - 100

Ejercicio Resuelto 99.
Sea $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Justifica que las funciones f y h definidas en Ω por

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}, \qquad h(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \qquad (z \in \Omega)$$

son holomorfas en Ω y tienen la misma parte principal en cada entero $n \in \mathbb{Z}$. Dedúzcase que la función

$$g(z) = f(z) - h(z), \qquad (z \in \Omega),$$

puede extenderse a una función entera y acotada y que, por tanto, g es idénticamente nula.

Solución.
Dado $k \in \mathbb{Z}$, nótese que la función $z \mapsto \operatorname{sen} \pi z$ se anula en k, mientras que su derivada $z \mapsto \pi \cos \pi z$ aplica k en $(-1)^k \pi \neq 0$, luego k es un cero simple de la función $\operatorname{sen} \pi z$, y por tanto un cero doble de la función $\operatorname{sen}^2 \pi z$. Luego k es un polo doble de la función f, y por tanto el desarrollo de Laurent de f en k será de la forma

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-k)^2} + \frac{c_{-1}}{z-k} + \psi_k(z), \qquad \forall z \in D(k,1)\backslash\{k\}$$

para conveniente función ψ_k holomorfa en $\Omega \cup \{k\}$.

Claramente

$$c_{-2} = \lim_{z \to k} (z-k)^2 f(z) = \lim_{z \to k} \frac{\pi^2 (z-k)^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \lim_{z \to k} \left(\frac{\pi(z-k)}{\operatorname{sen} \pi z} \right)^2 .$$

Puesto que (por L'Hopital)

$$\lim_{z \to k} \frac{\pi(z-k)}{\operatorname{sen} \pi z} = \lim_{z \to k} \frac{\pi}{\pi \cos \pi z} = \frac{\pi}{\pi \cos \pi k} = (-1)^k, \tag{6}$$

se sigue que $c_{-2} = 1$.

Por definición $c_{-1} = \operatorname{Res}(f, k)$. Puesto que f tiene en k un polo doble, sabemos que

$$c_{-1} = \lim_{z \to k} \frac{d}{dz} \big((z-k)^2 f(z) \big) = \lim_{z \to k} \frac{d}{dz} \left(\frac{\pi^2 (z-k)^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} \right).$$

Nótese que

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\pi^2(z-k)^2}{\operatorname{sen}^2\pi z}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{\pi(z-k)}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2=2\,\frac{\pi(z-k)}{\operatorname{sen}\pi z}\;\frac{d}{dz}\left(\frac{\pi(z-k)}{\operatorname{sen}\pi z}\right)$$

y

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\pi(z-k)}{\operatorname{sen}\pi z}\right)=\pi\;\frac{\operatorname{sen}\pi z-\pi(z-k)\cos\pi z}{\operatorname{sen}^2\pi z}$$

Por L'Hopital

$$\lim_{z\to k}\frac{d}{dz}\left(\frac{\pi(z-k)}{\operatorname{sen}\pi z}\right)=\pi\;\lim_{z\to k}\;\frac{\pi\cos\pi z-\pi\cos\pi z+\pi^2(z-k)\operatorname{sen}\pi z}{2\pi\;\operatorname{sen}\pi z\cos\pi z}=$$

$$\pi\;\lim_{z\to k}\;\frac{\pi}{2}\;\frac{z-k}{\cos\pi z}=0.$$

Ahora, de (6), concluimos que $c_{-1}=0$.

Luego la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de f en k es

$$\frac{1}{(z-k)^2}.$$

Vamos a estudiar ahora la función h. Consideremos las funciones $h_n:\Omega\to\mathbb{C}$ con $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ definidas por

$$h_0(z)=\frac{1}{z^2}\qquad\text{y}\qquad h_n(z)=\frac{1}{(z+n)^2}+\frac{1}{(z-n)^2}.$$

Dado un compacto K con $K\subseteq\Omega$, fijemos un natural n_0 tal que

$$K\subseteq\overline{D}(0,n_0+\frac{1}{2}).$$

Es claro que, para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n>n_0$ y para todo $z\in K$ se verifica que

$$|z+n|\geq n-(n_0+\frac{1}{2})\qquad\text{y}\qquad |z-n|\geq n-(n_0+\frac{1}{2}),$$

luego

$$\frac{1}{|z+n|^2}\leq\frac{1}{\left[n-(n_0+\frac{1}{2})\right]^2}\qquad\text{y}\qquad\frac{1}{|z-n|^2}\leq\frac{1}{\left[n-(n_0+\frac{1}{2})\right]^2}.$$

Luego

$$|h_n(z)|^2\leq\frac{2}{\left[n-(n_0+\frac{1}{2})\right]^2},\qquad\forall n>n_0,\quad z\in K.$$

Por consiguiente, para todo $z \in K$, la serie $\sum_{n>n_0} |h_n(z)|^2$ "está mayorada" por la serie numérica $\sum_{n>n_0} \frac{2}{\left[n-(n_0+\frac{1}{2})\right]^2}$, que es convergente. Por el Criterio de la mayorante de Weierstrass podemos asegurar que la serie $\sum_{n\geq 0} h_n$ converge uniformemente en K. En particular, la serie $\sum_{n\geq 0} h_n$ converge puntualmente en Ω. Ahora, por el Teorema de convergencia de Weierstrass podemos afirmar que la función suma

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(z)$$

es holomorfa en Ω. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ es claro que

$$h(z) = \frac{1}{(z-k)^2} + \varphi_k(z)$$

donde

$$\varphi_0(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(z) \qquad \text{y} \qquad \varphi_k(z) = \frac{1}{(z+k)^2} + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq k}}^{+\infty} h_n(z) \quad (k \neq 0)$$

es una función holomorfa en $\Omega \cup \{k\}$.

Luego también la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de h en k es

$$\frac{1}{(z-k)^2}.$$

Dado $k \in \mathbb{Z}$, puesto que

$$f(z) = \frac{1}{(z-k)^2} + \psi_k(z) \quad \text{y} \quad h(z) = \frac{1}{(z-k)^2} + \varphi_k(z), \qquad \forall z \in D(k,1)\backslash\{k\}$$

se tiene que $g = f - h$ coincide con $\psi_k - \varphi_k$ en $D(k,1)\backslash\{k\}$. Como quiera que $\psi_k, \varphi_k \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{k\})$, se sigue que g tiene una extensión holomorfa a $D(k,1)$. Luego g puede verse como una función entera.

Nótese que f es par. También las h_n son pares, y por tanto h es par. Además, puesto que el seno es periódica de periodo 2π y el seno al cuadrado es periódica de periodo π, se sigue que f es periódica de periodo 1.

Veamos que también h es periódica de periodo 1. Empecemos notando que

$$h_0(z+1) = \frac{1}{(z+1)^2}$$

$$h_1(z+1) = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{z^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_n(z+1) = \frac{1}{(z+n+1)^2} + \frac{1}{(z-(n-1))^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, se verifica que

$$\sum_{k=0}^{n} h_k(z+1) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(z) + \frac{1}{(z+n)^2} + \frac{1}{(z+n+1)^2}.$$

Tomando límites obtenemos que

$$h(z+1) = h(z).$$

Veamos ahora que tanto f como h están acotadas en la semifranja vertical

$$V = \{z = x + iy \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 1 \leq y\}.$$

Sabemos (p. 65) que

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x \, + \, \operatorname{senh}^2 y$$

luego

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad |\operatorname{sen} \pi z|^2 = \operatorname{sen}^2 \pi x \, + \, \operatorname{senh}^2 \pi y \geq \operatorname{senh}^2 \pi y.$$

Como el seno hiperbólico es creciente, tenemos que

$$|\operatorname{sen} \pi z|^2 \geq \operatorname{senh}^2 \pi \qquad \forall z \in V$$

y por tanto

$$|f(z)| \leq \frac{\pi^2}{\operatorname{senh}^2 \pi}, \qquad \forall z \in V.$$

Por otra parte, puesto que, para $z = x + iy \in V$ se tiene que

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \geq 1,$$

se sigue que

$$|h_0(z)| = \frac{1}{|z|^2} \leq 1.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$

$$|h_n(z)| \leq \frac{1}{|z+n|^2} + \frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{(x+n)^2+y^2} + \frac{1}{(x-n)^2+y^2}.$$

Nótese que

$$0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad leqn \leq x+n \quad \Rightarrow \quad n^2 \leq (x+n)^2$$

y

$$0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x-n \leq -n+1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (n-1)^2 \leq (x-n)^2$$

luego

$$(x+n)^2 + y^2 \geq n^2 + 1 \qquad \text{y} \qquad (x-n)^2 + y^2 \geq (n-1)^2 + 1$$

con lo que

$$|h_n(z)| \leq \frac{2}{(n-1)^2+1}, \qquad \forall z \in V,$$

y por tanto

$$|h_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |h_n(z)| \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)^2+1}, \qquad \forall z \in V.$$

Luego h está acotada en V.

Por tanto $g = f - h$ está acotada en V. Puesto que g es par, también g está acotada en $-V$. Además, puesto que g es periódica de periodo 1, también g está acotada en

$$W = \{z = x + iy \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ y \leq -1\}.$$

Por otra parte, puesto que g es entera y

$$K = \{z = x + iy \,:\, 0 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$$

es un compacto, se sigue que g está acotada en K.

De todo lo anterior se deduce que g está acotada en la franca vertical

$$\mathbb{F} = \{z = x + iy \,:\, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Como g es periódica de periodo 1 se sigue que g está acotada. Por el Teorema de Liouville, g es constante.

Nótese que

$$g(0) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0}(f(z) - h(z)) = \lim_{z\to 0}(f(z) - \frac{1}{z^2}) - \lim_{z\to 0}(h(z) - \frac{1}{z^2}).$$

Puesto que

$$f(z) - \frac{1}{z^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} = \frac{\pi^2 z^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen}^2 \pi z}{\pi^2 z^4}\right)$$

y

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen}^2 \pi z}{\pi^2 z^4}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\pi^2 z^2 - \operatorname{sen}^2 \pi z}{\pi^2 z^4} = \text{(por L'Hopital)} =$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{2\pi^2 z - 2\pi\ \operatorname{sen}\pi z\cos\pi z}{4\pi^2 z^3} = \lim_{z\to 0}\frac{\pi\, z - \operatorname{sen}\pi z\cos\pi z}{2\pi z^3} = \text{(por L'Hopital)} =$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\pi - \pi\cos^2\pi z + \pi\operatorname{sen}^2\pi z}{6\pi z^2} = \text{(por L'Hopital)} =$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{2\pi\cos\pi z\operatorname{sen}\pi z + 2\pi\operatorname{sen}\pi z\cos\pi z}{12z} =$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\pi\cos\pi z\operatorname{sen}\pi z}{3z} = \text{(por L'Hopital)} = \lim_{z\to 0}\frac{-\pi^2\operatorname{sen}^2\pi z\ +\ \pi^2\cos^2\pi z}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Luego, teniendo en cuenta (6) se sigue que

$$\lim_{z\to 0}(f(z) - \frac{1}{z^2}) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Por otra parte

$$h(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(z)$$

y por tanto

$$\lim_{z\to 0}(h(z) - \frac{1}{z^2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \text{(pág. 228)} = 2\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Luego $g(0) = 0$, y por tanto g es idénticamente nula.

Ejercicio Resuelto 100.
Sea f una función holomorfa que no se anula en el anillo $A(0;1,2)$. Pruébese

que hay un número entero n, y una función g holomorfa en dicho anillo, tal que $f(z) = z^n e^{g(z)}$ para todo $z \in A(0;1,2)$.

Solución.
Empecemos notando que supuesto cierto el enunciado del ejercicio se tiene que

$$f'(z) = nz^{n-1}e^{g(z)} + z^n g'(z)e^{g(z)}, \quad \forall z \in A(0;1,2),$$

luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z} + g'(z), \quad \forall z \in A(0;1,2),$$

y por tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\frac{3}{2})} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\frac{3}{2})} \frac{n}{z}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\frac{3}{2})} g'(z)\,dz = n.$$

(donde se ha tenido en cuenta la caracterización integral del índice y el teorema de caracterización de primitivas (Teorema 2.10).)

Vamos a resolver el ejercicio. Definamos

$$n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\frac{3}{2})} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

y notemos que

$$n = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\frac{3}{2}e^{it})}{f(\frac{3}{2}e^{it})}\,\frac{3}{2}\,i\,e^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ C(0,\frac{3}{2})} \frac{1}{z}\,dz = Ind_{f\circ C(0,\frac{3}{2})}(0),$$

y por tanto n es un número entero. Consideremos la función holomorfa

$$h(z) = z^{-n}f(z), \quad \forall z \in A(0;1,2),$$

y notemos que

$$h'(z) = -nz^{-n-1}f(z) + z^{-n}f'(z), \quad \forall z \in A(0;1,2),$$

y por tanto

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = -\frac{n}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad \forall z \in A(0;1,2).$$

Dado un camino cerrado γ en $A(0;1,2)$ consideremos el ciclo nulhomólogo respecto del anillo $A(0;1,2)$ dado por

$$\gamma_0 = \gamma - Ind_\gamma(0)C(0,\frac{3}{2}),$$

y notemos que por la forma general del Teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma_0} \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = 0,$$

y por tanto

$$\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = Ind_{\gamma}(0) \int_{C(0,\frac{3}{2})} \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz =$$

$$Ind_{\gamma}(0) \int_{C(0,\frac{3}{2})} \left(-\frac{n}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz =$$

$$Ind_{\gamma}(0) \left(-\int_{C(0,\frac{3}{2})} \frac{n}{z}\, dz + \int_{C(0,\frac{3}{2})} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \right) =$$

$$Ind_{\gamma}(0)\, (-2\pi i n + 2\pi i n) = 0.$$

Ahora, por el Teorema de caracterización de existencia de primitivas, podemos afirmar que $\frac{h'}{h}$ admite primitiva en el anillo $A(0;1,2)$, y por el Teorema 1.49 h tiene logaritmos holomorfos en dicho anillo, esto es existe una función holomorfa g en $A(0;1,2)$ tal que

$$h(z) = e^{g(z)}, \quad \forall z \in A(0;1,2),$$

y por tanto

$$f(z) = z^n e^{g(z)}, \quad \forall z \in A(0;1,2).$$

$\blacksquare$